Universidad del Valle

Instituto de Psicología

Programa académico de Psicología

Desarrollo del pensamiento funcional en niños de 7 a 8 años, a través del uso de representaciones matemáticas y tecnologías físicas e interactivas, en un contexto multivariable de ciencias

Laura Marcela Peña Mercado

Directora: Yenny Fabiola Otálora Sevilla

Santiago de Cali

Septiembre, 2019

Contenido

1. Introducción

El álgebra ha sido a lo largo de los años un tema de interés en el área de la educación. Esto debido a la importancia que implica el pensamiento algebraico en el dominio de las matemáticas. Este tipo de pensamiento está altamente relacionado con habilidades de abstracción y generalización que abarcan un compendio de procesos más complejos que los necesarios en la aritmética, y que tradicionalmente han sido exclusivamente atribuidos a estudiantes de bachillerato, en niveles superiores del proceso de escolarización. Por ello, algunos investigadores (Blanton, Otálora, Brizuela, Gardiner, Sawrey, Gibbins & Kim, 2018; Blanton, Brizuela, Gardiner & Sawrey, 2017; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Ownes, & Gardiner, 2015; Brizuela, Martínez & Cayton-Hodges, 2013) interesados por la educación matemática han puesto sus esfuerzos en demostrar que los niños en edades tempranas pueden desarrollar unas formas de pensamiento algebraico intuitivas que se evidencian en habilidades como la comprensión de patrones, relaciones y funciones; la representación y análisis de situaciones matemáticas y algebraicas con sus respectivas formas de simbolización; y el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas (Blanton & Kaput, 2008).

Sin embargo, la investigación acerca de las habilidades algebraicas se ha centrado en poblaciones de edades superiores, específicamente de aquellos estudiantes que se encuentran cursando bachillerato, pese a que existe evidencia de que la implementación temprana del álgebra y el fomento del pensamiento funcional desde la infancia pueden nutrir el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en estos grados superiores de escolaridad (Blanton & Kaput, 2008). Por tal motivo, y con la intención de aportar a la literatura existente acerca del álgebra temprana desde la psicología, el presente estudio busca examinar cómo niños entre siete y ocho años desarrollan formas intuitivas de pensamiento algebraico que subyacen al concepto de función, teniendo en cuenta el uso de múltiples representaciones matemáticas (e.g. tablas de funciones y notación algebraica), que emergen en situaciones de dominio extramatemático como las ciencias naturales.

Para este propósito se implementaron dos estrategias metodológicas. En primer lugar, se llevó a cabo un diseño microgenético que permitió caracterizar las trayectorias de desarrollo de pensamiento funcional de cuatro niños, en un período de ocho sesiones, de aproximadamente 50 minutos de duración por cada sesión. En segundo lugar, se buscó propiciar dicho desarrollo a través de la implementación de una experiencia de aprendizaje en un contexto no formal de aprendizaje. Estos contextos incluyen entornos museísticos, como el Parque Zoológico de Cali, que por el tipo de exhibiciones que poseen permiten desarrollar formas de pensamiento científico, lúdico y artístico a los visitantes. Un zoológico es un escenario de investigación privilegiado, porque facilita la inclusión de contextos del mundo real, que se pueden aprovechar para promover el uso del pensamiento funcional en edades tempranas, además representa un entorno museístico vivo (, por la naturaleza de las colecciones, las características de las exhibiciones y los ambientes de aprendizaje que a lo largo de los años han diseñado para enriquecer la experiencia interactiva. En la experiencia museística implementada en el Zoológico de Cali se examinaron las formas de pensamiento funcional de un grupo de 10 niños, a partir de una exhibición creada e implementada para este fin. Para realizar ambas estrategias metodológicas -microgenético y experiencia museística- se diseñó un ambiente de aprendizaje, a través de un modelo tridimensional que representó la contaminación de un río, en el cual influyen diferentes fuentes de contaminación (e.g. cultivos, ciudades e industrias de tala de árboles)

2. Justificación

Investigaciones previas han mostrado que los niños en edades tempranas son capaces de construir conocimiento algebraico, incluso reconociendo y comprendiendo conceptos tan complejos como las funciones y la relación entre variables (Blanton & Kaput, 2011). Carraher, Schliemann & Brizuela (2005) afirman que en edades entre 8 a 11 años los niños pueden beneficiarse de las actividades de álgebra temprana en procesos de aprendizaje que involucren comprender las operaciones aritméticas como funciones; comprender el significado de las variables, desde un enfoque funcional, y no solo como valores; construir e interpretar gráficas de funciones lineales y no lineales; y resolver problemas algebraicos usando múltiples sistemas representacionales como tablas, gráficas y ecuaciones (Carraher, Schliemann, Schwartz, 2008; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007 (citado en Brizuela, Martínez y Cayton, 2013, p. 8).

La introducción temprana de la notación para representar una variable en las experiencias matemáticas de los niños puede ofrecerles oportunidades de desarrollar una mayor familiaridad y fluidez a la hora de usar esta convención para representar relaciones matemáticas (Brizuela, et al., 2015; Cooper & Warren, 2011; Moss & McNab, 2011; citado en Blanton, et al. 2017). Blanton, et al. (2017) sugieren que los niños pueden aprender a pensar de manera sofisticada acerca de las cantidades que varían y de la notación de éstas. Lo anterior resulta relevante para el presente estudio pues aporta evidencia la importancia del pensamiento funcional de los niños y su capacidad en “el uso de diferentes representaciones como tablas de funciones pueden servir para mediar y apoyar el pensamiento algebraico de los niños (Brizuela & Earnest, 2008)” para propiciar la emergencia de las distintas formas de pensamiento funcional (citado en Blanton, et al., 2017).

Investigaciones previas han encontrado un buen rendimiento de los niños en problemas de naturaleza matemática, y en áreas relacionadas con las variables, las relaciones funcionales y las expresiones algebraicas (Brizuela, Martínez, Cayton, 2013). Además, en la gran mayoría de la literatura revisada se da énfasis en comprender el desarrollo y el aprendizaje de los niños en áreas específicas del álgebra ligados a las relaciones aditivas y a la resolución de ecuaciones más sencillas que no involucran contextos extra-matemáticas. En el campo de la biología se pueden encontrar contextos en los que se requiera el uso de múltiples representaciones matemáticas para comprender conceptos más avanzados como el crecimiento de una población, a lo largo del tiempo, en función de variables como el tiempo, natalidad, etc. Si bien en la literatura se encuentra un interés por comprender cómo los niños desarrollan las relaciones funcionales y el carácter funcional de la aritmética, no se ha investigado la emergencia de formas de pensamiento funcional en niños al enfrentarse a tareas, sin la introducción de la instrucción directa.

La mayoría de los estudios aún se enfocan en problemas con contexto matemático y no incluyen la indagación de conceptos complejos de las ciencias naturales, sino contextos relacionados con aspectos más cotidianos. Un ejemplo de ello, se puede encontrar en la literatura de Blanton & Kaput (2011) con las situaciones desarrolladas en sus intervenciones, como '*handshakes'* o el problema del número de mesas en un restaurante en relación al número de personas que pueden sentarse, etc.

El trabajo de algunos autores en los procesos de recontextualización de las situaciones problema presentadas a los niños, en los que logran identificar los elementos matemáticos del problema, moviéndose entre un contexto y otro; es decir, de contexto extramatemático, el niño puede abstraer los elementos de naturaleza matemática con el fin de resolver el problema, y a partir de la resolución volver a recontextualizar dichos elementos verbalizando en función del fenómeno extramatemático que se le presentó inicialmente (Cañadas, et al., 2015). Esto demuestra la importancia de que las tareas y evaluaciones que se diseñen se den en un *contexto extramatemático*, en orden de crear una estructura que demande procesos cognitivos más complejos en los que se vea presente la abstracción y la comprensión de los elementos del problema extramatemático (Chevallard, 1989), el cual se entiende como aquél contexto en el que se plantea una situación problemática utilizando fenómenos externos al campo matemático (Brizuela, 2013).

Es necesario definir la naturaleza de los contextos de aprendizaje no formal, ya que será el otro escenario, fuera del microgenético, en el que cual se desarrollará el proyecto aquí definido. En estos contextos de aprendizaje, de acuerdo con Smitter (2006), el propósito educativo es sistematizado y organizado, y puede dirigirse al desarrollo de diversas actividades como: “actividades que pueden plantearse como alternativas tendientes a desarrollar habilidades y conocimientos que no se relacionan específicamente con la participación en la fuerza de trabajo (...), actividades de capacitación a individuos y a grupos de comunidad, actividades de actualización profesionales, entre otras.” (p. 5). Asimismo, la educación no formal, puede resultar útil para enfrentar las exigencias que emanan de los cambios de pensamiento, descubrimientos científicos, nuevas tecnologías, ya que, de acuerdo con Smitter (2006), permite la adaptación rápida y pertinente a las innovaciones (Smitter, 2006, p. 5).

2.2 Formulación del problema

Teniendo en cuenta los antecedentes descritos en el anterior apartado, el presente estudio tiene como objetivo examinar la emergencia de formas de pensamiento funcional en niños pequeños, en un ambiente de aprendizaje diseñado con un contexto específico de las ciencias naturales, y en el cual se privilegia el uso de múltiples representaciones matemáticas -tablas de funciones y notación algebraica-, así como el uso de tecnologías físicas interactivas. El análisis de la emergencia de las formas de pensamiento funcional, se enfoca en el uso que los niños hacen de tres habilidades algebraicas específicas, a saber el *pensamiento covariativo*, las *relaciones de correspondencia* y la *notación algebraica*.

Se parte de la definición de Kaput (2008), en la que se concibe el álgebra como el estudio de las funciones, las relaciones y las variaciones. De ese modo, cuando se pretende fomentar el pensamiento algebraico, debe primar el acceso a temprana edad a conceptos como la *función,* para que los niños puedan desarrollar procesos de generalización cada vez más complejos. Asimismo, cabe destacar que una de las características de la intervención temprana en el concepto de función es que "puede facilitar la introducción del uso de diferentes formas de representar como la notación algebraica, tablas de funciones (de entrada y salida) y gráficos en el plano cartesiano" (Martinez & Brizuela, 2006).

Investigaciones previas han encontrado que los estudiantes de primaria pueden desarrollar y usar una variedad de herramientas representacionales para razonar acerca de las funciones. Según estos investigadores (e.g., Blanton & Kaput, 2011; Blanton, 2008; Brizuela & Schielmann 2003; Brizuela et al. 2000; Carraher et al. 2008; Kaput & Blanton 2005; Schielmann & Carraher 2002; Schielmann et al. 2001), los estudiantes pueden describir en palabras y en símbolos recursivos, hacer covariaciones y relaciones de correspondencia con los datos. Igualmente, pueden usar lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas. De ahí la intención de hacer énfasis en el uso de múltiples representaciones matemáticas, pues se busca establecer una relación entre el uso de estas representaciones y la emergencia de formas de pensamiento funcional.

Por otra parte, en la literatura se encuentran vacíos metodológicos en lo que concierne a la descripción de los cambios cognitivos que se dan en periodos cortos de tiempo, ya que la mayoría de estudios se realizan con diseños longitudinales en contextos escolares sobre habilidades algebraicas o con estudios de casos extraídos de dichos estudios longitudinales, en los cuales se usa la instrucción directa, la entrevista clínica basada en la tarea, y análisis del discurso. Esto subraya la necesidad de contar con estudios cuyo diseño enfatiza la microgénesis del cambio, en aras de trazar las posibles trayectorias de desarrollo de los niños al exponerse a una intervención en álgebra. Un abordaje microgenético permitiría ver cómo emergen y varían las formas de pensamiento funcional, en cuanto a las diversas representaciones matemáticas que los niños pueden utilizar en un ambiente de aprendizaje, y habilidades algebraicas concretas puestas en juego en las situaciones de resolución de problemas. Además, dichas situaciones de resolución de problemas deben contar con *contextos extramatemáticos* que propicien procesos de recontextualización sofisticados, y que demanden a los niños la identificación de variables presentes en la situación, de sus relaciones y las formas de pensamiento que emergen cuando se les pide construir ecuaciones algebraicas y tablas de funciones. En este estudio dicho *contexto extramatemático* se dará en el dominio de las ciencias naturales, específicamente en fenómenos relacionados con la contaminación en ríos. Este contexto se elige ya que es un escenario que privilegia la identificación de los ecosistemas y sus procesos de cambio en el mundo real. Además, por las características que estos tienen para la identificación de variables y sus respectivas relaciones.

El presente proyecto se enmarca dentro del paradigma de la educación STEM, en la cual se busca integrar deliberadamente las disciplinas que más se han utilizado para resolver problemas del entorno del mundo real (Labov, Reid & Yamamoto, 2010; Sanders, 2009; en

Breiner, Harkness, Johnson & Koehler, 2012); e involucrar a los estudiantes en la exploración y el descubrimiento de las ciencias, la tecnología, las matemáticas y las ingenierías, que para la presente investigación, las situaciones del ambiente de aprendizaje implicarían la relación matemáticas-ciencias.

Esto dado el interés de exponer a los niños a contextos distintos a los matemáticas, en los cuales tendrán que identificar las variables presentes en las situaciones específicas de las ciencias naturales, para después emplear un proceso de recontextualización matemática, que les permita expresar dichas variables en términos algebraicos, ya sea a través de la notación y de las tablas de funciones de *input* y *output.*

La perspectiva educativa STEM implica ver las disciplinas de la ciencia y las matemáticas como una sola unidad, para de esta manera lograr en el contexto de la enseñanza una sola entidad cohesiva. Breiner, Harkness, Johnson & Koehler, 2012). Breiner et al. (2012), ejemplifican la necesidad de esta integración cuando afirman que a pesar de que un profesional se identifique a sí mismo dentro de alguna de estas disciplinas, éste en algún momento requerirá una comprensión profunda de otras disciplinas científicas, tecnológicas y matemáticas para desempeñar sus funciones adecuadamente (Bennet & O'Neale, 1998; citado en Breiner et al., 2012).

Para el caso específico de la experiencia museística, el Zoológico se enmarca dentro del contexto no formal de aprendizaje, dadas las características de sus programas educativos, las cuales giran alrededor de tres pilares, a saber, la ciencia, el arte, el juego y la formación de competencias ciudadanas (Entrevistas con el director del Centro de Innovación y Desarrollo del Zoológico de Cali, CIDZOO). Asimismo, este espacio puede considerarse un entorno educativo museístico, pues promueve experiencias de aprendizaje para los visitantes, en las cuales se ofrecen "cosas interesantes para que las personas exploren y descubran a través del tacto y la investigación. Los museos dirigen el aprendizaje al proporcionar a los visitantes oportunidades únicas para explorar diversos conceptos de matemáticas, arte y ciencias sociales" (Andre, Durksen & Volman, 2017). Dado que en la literatura de álgebra temprana los estudios se han realizado en contextos específicos de aprendizaje formales o escolares, la búsqueda de un contexto diferente en el que se lograra propiciar la emergencia de estas formas de pensamiento. Este tipo de contexto se constituyó como el escenario más adecuado para pensarse una experiencia museística en la cual se permitiera a los niños interactuar con un ambiente de aprendizaje, en el cual fuera posible la emergencia de formas intuitivas de pensamiento funcional, ya que en estos se propicia el aprendizaje en disciplinas como las matemáticas y las ciencias, a través del juego, de experiencias lúdicas e interactivas.

2.2.1. Pregunta de Investigación

¿Cómo niños de 7 a 8 años desarrollan formas intuitivas de pensamiento funcional a través del uso de múltiples representaciones matemáticas en ambientes de aprendizaje basados en un contexto extra-matemático?

2.3. Objetivos de Investigación

2.3.1. Objetivo General

Promover en niños entre 7 y 8 años el uso de ambientes de aprendizaje con contexto extra-matemático que propicien el desarrollo de formas de pensamiento funcional desde las habilidades de pensamiento covariativo, relaciones de correspondencia y notación algebraica.

2.3.2. Objetivos Específicos

1. Examinar la manera en que las formas de pensamiento funcional -pensamiento covariativo, relaciones de correspondencia y notación algebraica- emergen y cambian en un corto período de tiempo, en el contexto de situaciones extra-matemáticas.

2. Caracterizar la emergencia de formas intuitivas de pensamiento funcional -pensamiento covariativo, relaciones de correspondencia y notación algebraica-, en contexto de situaciones extra-matemáticas, en el marco de una experiencia museística.

3. Revisión bibliográfica

3.1. Pensamiento Funcional y Habilidades Algebraicas Tempranas

En el álgebra uno de los ejes transversales es el estudio de las funciones. Cañadas, Brizuela, y Blanton, (2015) siguiendo los planteamientos de Freudenthal (1983) acogen la definición de función en términos de **"algo" que varía** bajo ciertas condiciones, en el cual se incluye la variable como un elemento clave para su comprensión. De acuerdo con los autores, las **variable**s expresan cantidades que pueden tener diferentes valores en un conjunto numérico específico. De esta manera, **las funciones pueden tener diferentes variables, siempre y cuando tomen valores que puedan tener relaciones de dependencia con otros**. Asimismo, las funciones constituyen un concepto poderoso en el dominio de las matemáticas porque dan lugar a relaciones y transformaciones de conceptos matemáticos, y se encuentran presentes en todos los aspectos de las ciencias cuantitativas (Warren, Miller, Cooper, 2013, citado en Cañadas,et. al, 2015).

Tirney (2008) afirma que la noción de sucesos o fenómenos variables a lo largo del tiempo, subyace a historias que los niños cuentan desde una edad temprana. En su investigación sobre el cambio a lo largo del tiempo, involucró a los niños en la narración de historias sobre una variable que cambia con el tiempo y en la representación de estas historias en tablas, gráficos y grupos de cambio aditivos. Los resultados mostraron, cómo los niños utilizan estas representaciones y razonan sobre ellas como sistemas de símbolos con significados convencionales, organizados de acuerdo a reglas, para proporcionar descripciones de los fenómenos que cambian.

De acuerdo con autores como Blanton y Kaput (2011), el pensamiento funcional se puede caracterizar como el proceso de construir, describir y razonar con y sobre las funciones, en las que se generaliza relaciones funcionales entre cantidades para representar, razonar y comprender el comportamiento funcional de una variable en un fenómeno determinado. Blanton y Kaput (2011) argumentan que el pensamiento funcional en los niños se da de diferentes formas. Entre ellas, se puede encontrar (a) una forma de pensamiento que permite encontrar variaciones en una secuencia de valores, también llamados *patrones recursivos;* (b) el *pensamiento covariativo*, basado en el análisis sobre cómo dos cantidades varían simultáneamente y mantienen ese cambio como una parte explícita y dinámica de la descripción de una función (e.g. cuando x incrementa uno, y incrementa tres puntos); (c) y el que incluye las r*elaciones de correspondencia*, basado en la identificación de una correlación entre variables (e.g. $y=3x+2$).

A propósito de lo anterior, Smitt (2008) afirma que "el pensamiento funcional, al menos para nuestros propósitos aquí, es un pensamiento representacional que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades, específicamente los tipos de pensamiento que conducen desde relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esa relación entre instancias. La parte del razonamiento algebraico del pensamiento funcional ocurre cuando los niños inventan o se apropian de sistemas de representación apropiados para representar una generalización de una relación entre cantidades variables". Lo anterior destaca uno de los aspectos principales del presente estudio, en la medida en que da un lugar relevante al uso de representaciones matemáticas en la expresión del pensamiento funcional. A partir de esto, el autor menciona algunas actividades en las que es posible la emergencia de este tipo de pensamiento: (a) involucrarse en un problema dentro de una situación funcional; (b) identificar dos o más cantidades que varían en el curso de la actividad, enfocando la atención en la relación entre las variables; (c) hacer un registro de los valores correspondientes de estas cantidades, generalmente tabulares, gráficas o icónicas; (d) buscar patrones y certezas matemáticas, en la que se coordinen patrones identificados con las acciones involucradas en la realización del problema, usando esta coordinación para crear una representación del patrón identificado en la relación (Smitt, 2008). El uso de representaciones matemáticas tabulares lleva a que los niños o estudiantes construyan expresiones simbólicas, que puedan interpretarse como declaraciones de una certeza matemática o generalización.

Por ejemplo, se ha encontrado que los estudiantes en grados de primaria tienen muchos recursos para razonar sobre la función, en tanto que hay evidencia de que estos niños pueden “generalizar relaciones variables, identificar relaciones funcionales cuando dos variables están involucradas, representar estas relaciones de maneras diferentes (incluso con notación variable) y razonar con relaciones funcionales para interpretar situaciones problemáticas (p. Ej. , Blanton et al., 2015b; Brizuela & Earnest, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela, y Earnest, 2006; Merino, Cañas, y Molina, 2013; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2007).” (Cañadas, Brizuela & Blanton, 2005). Asimismo, mencionan Cañadas, Brizuela & Blanton (2015) que existen estudios en los que se sugiere que los niños de tercer grado pueden emplear diferentes representaciones de funciones en un contexto de resolución de problemas.

Cañadas, et al. (2015) realizaron un estudio con 21 estudiantes de segundo grado, con el fin de introducir a los niños de primaria un contenido algebraico que estuviera basado en funciones. Dicha investigación se centró en una lección del experimento docente que los autores llevaron a cabo, en el que los estudiantes trabajaron con un problema que implicaba una relación funcional lineal del tipo y = 2x. El estudio proporciona evidencia de las ideas de los estudiantes sobre las relaciones funcionales, y demostraron habilidades para generalizar esta relación como una regla de correspondencia.

Además de ello, a partir de los resultados se concluyó que los niños, de aproximadamente siete años, pueden identificar el problema poniendo en juego un pensamiento funcional que incluye el uso de *patrones recursivos* como contar de dos en dos, o mediante un *pensamiento covariativo*. Asimismo, se encontró que los estudiantes parecían cómodos usando la representación tabular para organizar la información del problema. Utilizaron ambos dibujos y lenguaje natural para expresar y justificar las relaciones entre las dos cantidades variables. En términos de las dimensiones de los números con los que trabajaron, los estudiantes se sentían cómodos trabajando con los números que se les presentaban, incluso con valores bajos (hasta un millón). Además, intentaron expresar una relación funcional general usando la notación variable en formas significativas (Cañadas, Brizuela & Blanton, 2015)

A su vez, Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman (2015) encontraron trayectorias de aprendizaje en un grupo de niños de grado primero, el cual hace parte de un estudio realizado a 115 estudiantes desde jardín a segundo grado. El diseño se basó en el experimento de enseñanza en el aula (CTE), a través de tareas asociadas con una secuencia instruccional. Dichas tareas incluyeron la covariación de dos cantidades, la tabulación de los datos y la exploración de los valores en la tabla, la exploración de las relaciones notadas en los datos representados en la tabla, la descripción explícita de cómo varían simultáneamente las cantidades dependientes a medida que las cantidades independientes aumenta una unidad, la predicción de valores de funciones y la generalización de las relaciones funcionales. Así, el objetivo del estudio fue mapear los terrenos conceptuales en el pensamiento algebraico de los niños en su capacidad para generalizar las relaciones algebraicas con las funciones.

Los resultados de Blanton et al., sugieren que los niños pueden aprender a pensar de formas bastante sofisticadas y generalizadas sobre las relaciones en los datos de funciones, desafiando así el enfoque curricular típico en los grados primarios inferiores en el que los niños consideran solo la variación en una secuencia de valores única." (2015). Además, mencionan que existen siete niveles de sofisticación en el pensamiento de los niños de 6 años, acerca de la generalización de las relaciones algebraicas (Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey & Newman, 2015, p. 16 -29) . Estos niveles muestran que hay niños que no establecen ningún patrón recursivo en una secuencia de valores o ninguna relación entre dos cantidades que covaríen, así como otros que sí exhiben formas de pensamiento funcional en el que logran conceptualizar las relaciones funcionales como un conjunto de relaciones particulares entre valores correspondientes específicos.

También se encontró que los niños que se ubicaron en el último nivel podían describir explícitamente las cantidades generalizadas y la transformación matemática entre las cantidades en las relaciones funcionales representadas mediante palabras y notación variable. Una distinción del pensamiento de los niños en este nivel se centró en su conciencia de lo que constituía una relación funcional. Ellos no usaban expresiones para representar reglas funcionales, sino que describían relaciones que identificaban explícitamente las dos cantidades en el escenario del problema y la transformación entre ellas, capturando con precisión las operaciones matemáticas en cantidades. Al usar la notación variable, caracterizaron la regla como una ecuación. Al representar la regla en palabras, usaron oraciones completas (aunque algunas veces torpes) que identificaron tanto las cantidades como su relación (Blanton, et al., 2015, p. 26).

Retomando los hallazgos descritos anteriormente, se puede afirmar que los niños tienen habilidades más complejas en lo que concierne al pensamiento algebraico. Esto debido a que los procesos de generalización de reglas algebraicas, la comprensión de las relaciones de correspondencia y de covariación entre variables, son temáticas que no se encuadran en los planes curriculares tradicionales en edades tempranas. Además de ello, muestra que los niños además de usar diversas representaciones matemáticas para comprender conceptos algebraicos, pueden usarlos para comprender conceptos incluso más complejos como las funciones.

En diversos estudios se ha encontrado que los niños desarrollan habilidades algebraicas en edades tempranas, contrario a lo que se piensa y espera en los planes curriculares que se dictan en las instituciones educativas. Dichas habilidades se enmarcan dentro del pensamiento algebraico, entendiéndolo como una actividad en la que se generalizan las ideas matemáticas, usando representaciones simbólicas literales y representando relaciones funcionales (Blanton & Kaput, 2011, p. 6). Además de ello, estas habilidades abarcan todo un conjunto de procesos relevantes en el desarrollo de conocimiento algebraico, como la comprensión de patrones, relaciones y funciones; la representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos, como la notación; el uso de modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas; y el análisis del cambio en diversos contextos (Blanton & Kaput, 2011).

Blanton, et al. (2017), concluyeron acerca de la evolución del pensamiento de los niños sobre el uso de variables y la notación de éstas en las relaciones funcionales, en un programa de intervención, basándose en el uso de trayectorias de aprendizaje. Para ello desarrollaron e implementaron una secuencia de instrucciones con la intención de mejorar la comprensión de los niños acerca de las relaciones funcionales. Los resultados del estudio sugieren que los niños pueden aprender a pensar de manera sofisticada acerca de cómo dos cantidades covarían y de la notación de éstas. Esto significa que los niños pueden construir y reflexionar sobre cantidades de valores indeterminados, lo cual justificaría que la notación variable se manifieste como una herramienta de mediación en el pensamiento algebraico.

Se ha encontrado que los niños a edad temprana son capaces de comprender y escribir notaciones algebraicas. Por ejemplo, en una investigación realizada por Brizuela, et. al (2015), los resultados ilustraron que los niños de seis años pueden usar la notación variable en formas significativas para expresar las relaciones entre variables. A su vez, las formas de pensamiento que emergieron en el grupo de niños incluyeron que la notación variable puede significar una etiqueta u objeto; que la notación variable puede representar una cantidad indeterminada; que las relaciones cuantitativas se pueden expresar a través de las relaciones ordinales entre letras en el alfabeto; y que puede darse a través de la inclusión de letras y números en una sola ecuación. También observaron que estos niños pudieron actuar en una expresión matemática que incluye la notación variable como un objeto matemático. (Brizuela et al., 2015, p. 25). Además, argumentaron que la introducción temprana de la notación en las expresiones matemáticas de los niños pueden ofrecerles oportunidades de desarrollar una mayor familiaridad y fluidez a la hora de usar esta convención para representar relaciones matemáticas.

Otros estudios han mostrado que los niños a temprana edad son capaces de comprender y derivar ecuaciones de situaciones de resolución de problemas, por ejemplo, Brizuela y Schliemann (2004) en un estudio longitudinal con 70 estudiantes, en cuatro salones de clase, desde segundo a cuarto grado (siete a ocho años, y de nueve a diez años, aproximadamente), el cual fue diseñado para promover la comprensión de ecuaciones lineales, funciones, tablas de funciones y gráficos de funciones lineales. Los resultados indicaron que "un tercio de los niños usaron una expresión algebraica para representar el problema, y más de un tercio de los niños incluyeron una letra para representar uno o más de los valores desconocidos." (Brizuela & Schliemann, 2004, p. 8). Además de ello, sugieren que más de la mitad de los niños representaron correctamente las cantidades en el problema usando letras para representar cantidades desconocidas.

De acuerdo con Brizuela (2013), desde 1998 la implementación de actividades sobre álgebra temprana y la documentación del aprendizaje algebraico en edades tempranas ha mostrado que,

> “la introducción del álgebra como parte del currículo de matemáticas es bastante factible y tiene incluso claridades en cómo específicamente las herramientas representacionales como tablas, gráficos, notación numérica y algebraica pueden ser empleados en ayudar a los estudiantes a expresar relaciones funcionales entre números y cantidades” (p. 6).

En un estudio realizado por Carraher, et al. (2006), se encontró que “los estudiantes jóvenes, de entre nueve y diez años, pueden hacer uso de ideas y representaciones algebraicas que por lo general están ausentes del plan de estudios de matemáticas inicial y se cree que están fuera del alcance de los estudiantes” (Carraher, et al, 2006, p. 2).

Carraher et al. (2006) afirmaron que, con el tiempo, los estudiantes usaron cada vez más las notaciones algebraicas y las representaciones de líneas numéricas como un medio natural para describir los eventos de los problemas que les presentaron (Carraher et al., 2006, p. 23). Además, concluyen que, de acuerdo a las experiencias obtenidas, los niños entre ocho y nueve años pueden aprender a usar las letras para representar valores desconocidos y pueden operar en representaciones que involucran letras y números sin tener que crear instancias de ellos. A su vez, “los niños pudieron operar con valores desconocidos y sacar conclusiones acerca de estas operaciones sin dejar de darse cuenta de que no conocían los valores de las incógnitas.

En el caso de las ecuaciones derivadas de situaciones problema verbales matemáticas, que conllevan a un proceso de generalización, también se ha encontrado que niños de primero a sexto grado pueden desarrollar representaciones escritas para problemas algebraicos y, con la ayuda del entrevistador, resolver problemas de ecuaciones lineales usando diferentes estrategias de solución (e.g. Lins Lessa, 1995; Brito Lima y da Rocha Falcio, 1997; citado en Carraher, et al., 2006) .

Por ejemplo, Brizuela y Lara-Roth (2001) realizaron un estudio longitudinal durante tres años, con un grupo de 39 estudiantes entre ocho y diez años, desde segundo hasta cuarto grado. Los autores encontraron que los niños de segundo desarrollaron representaciones tabulares sofisticadas de los datos presentados en un problema de la progresión del dinero ganado con el tiempo (Brizuela & Lara-Roth, 2001). Además, que los niños incorporaron en sus representaciones, las características de las tablas de funciones convencionales en las que se evidenció que los niños logran ubicar en las filas el dinero gastado y en las columnas el paso del tiempo. Esto a su vez, de acuerdo con las autoras, permite descubrir las concepciones y comprensiones que los niños tienen sobre las relaciones aditivas (Brizuela & Lara-Roth, 2001).

Estos hallazgos acerca de las habilidades algebraicas de los niños entre seis y diez años aproximadamente, son una muestra de cómo en edades tempranas es posible encontrar el desarrollo representaciones y habilidades que propicien una mayor comprensión a la hora de resolver problemas de naturaleza matemática. Sobre todo, justifica la necesidad de implementar en edades tempranas la experiencia de aprendizaje del álgebra con el fin de promover el uso de formas de pensamiento intuitivo que permita a los estudiantes superar las dificultades que se les presenta, cuando se implementa el álgebra formalmente.

A su vez, se relaciona con el problema de esta investigación en tanto que evidencia cómo la introducción de múltiples representaciones matemáticas como herramientas semióticas, en el inicio de la escolarización, facilita la comprensión de ideas algebraicas complejas, a las que tradicionalmente se han diseñado en los planes curriculares de las matemáticas en primaria. Esto resalta la importancia de las diversas formas en las que se puede acceder al álgebra, ya sea a partir de la notación de expresiones algebraicas o de representaciones tabulares. En el caso de la notación algebraica la intervención temprana es relevante ya que los niños con el uso de esta forma de representación pueden desarrollar una mayor familiaridad y fluidez a la hora de representar relaciones matemáticas. Asimismo, propiciar el uso de las representaciones gráficas y tabulares es importante en la medida en que muestran cómo los niños establecen correspondencias y relaciones entre variables (Brizuela & Earnest, 2008); lo cual permite concluir que dichas habilidades algebraicas que involucran el uso de diversas formas de representación (notación algebraica y tablas) son necesarias para el pensamiento algebraico de los niños.

También es necesario resaltar la pertinencia de los contextos en los que los problemas de naturaleza matemática son puestos; es decir, las situaciones de resolución de problemas que implican contextos extramatemáticos, donde se propicia que los niños sean capaces de entender las variables puestas en juego, para de esta manera reconocer el objeto matemático que se intenta expresar en el problema. Un ejemplo de ello se puede encontrar en el estudio de Cañadas, Brizuela y Blanton (2015), en el que los niños fueron capaces de recontextualizar el problema que se les presentó en un contexto físico (e.g. sobre el número de personas que podían sentarse en las sillas que estaban distribuidas en diferentes mesas), en un contexto puramente matemático para lo cual se definió la expresión $y=2x$.

Lo anterior supone que exponer a los niños a situaciones de resolución de problemas con contextos extramatemáticos, exige por parte de ellos una demanda cognitiva mayor, y además un proceso de recontextualización que implica reconocer que los niños comprenden la estructura de las funciones detrás del problema que se les presente.

Los resultados aquí presentados permiten reconocer los niños a edades tempranas cuentan con habilidades algebraicas que indican el desarrollo temprano del pensamiento algebraico y funcional, el cual podría emerger en situaciones de naturaleza funcional, en la que los niños puedan interactuar. Esto claramente implica que las situaciones de resolución de problemas, por sí solas, y con la ayuda de preguntas orientadoras en el marco del análisis de tareas y de las entrevistas clínicas basadas en tarea, pueden elicitar razonamientos elaborados ligados a esas formas de pensamiento, sin acudir a tratamientos como la instrucción directa del álgebra temprana. Es por ello, que para la presente investigación se da un lugar relevante a los ambientes de aprendizaje, cuyo dominio específico esté relacionado con las matemáticas y las ciencias naturales.

En diversos estudios se ha encontrado que los niños desarrollan habilidades algebraicas en edades tempranas, contrario a lo que se piensa y espera en los planes curriculares que se dictan en las instituciones educativas. Dichas habilidades se enmarcan dentro del pensamiento algebraico, entendiéndolo como una actividad en la que se generalizan las ideas matemáticas, usando representaciones simbólicas literales y representando relaciones funcionales (Blanton & Kaput, 2011, p. 6). Además de ello, estas habilidades abarcan todo un conjunto de procesos relevantes en el desarrollo de conocimiento algebraico, como la comprensión de patrones, relaciones y funciones; la representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos, como la notación; el uso de modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas; y el análisis del cambio en diversos contextos (Blanton & Kaput, 2011).

Blanton, et al. (2017), desarrollaron e implementaron una secuencia de instrucciones con la intención de mejorar la comprensión de niños de seis años, acerca de las relaciones funcionales. Los resultados del estudio sugieren que los niños pueden aprender a pensar de manera sofisticada acerca de cómo dos cantidades covarían y de la notación de éstas. Concluyeron acerca de la evolución del pensamiento de los niños sobre el uso de variables y la notación de éstas en las relaciones funcionales, en un programa de intervención, basándose en el uso de trayectorias de aprendizaje.. Esto significa que los niños pueden construir y reflexionar sobre cantidades de valores indeterminados, lo cual justificaría que la notación variable se manifieste como una herramienta de mediación en el pensamiento algebraico.

Se ha encontrado que los niños a edad temprana son capaces de comprender y escribir notaciones algebraicas. Por ejemplo, en una investigación realizada por Brizuela, et. al (2015), los resultados ilustraron que los niños de seis años pueden usar la notación variable en formas significativas para expresar las relaciones entre variables. A su vez, las formas de pensamiento que emergieron en el grupo de niños incluyeron que la notación variable puede significar una etiqueta u objeto; que la notación variable puede representar una cantidad indeterminada; que las relaciones cuantitativas se pueden expresar a través de las relaciones ordinales entre letras en el alfabeto; y que puede darse a través de la inclusión de letras y números en una sola ecuación. También observaron que estos niños pudieron actuar en una expresión matemática que incluye la notación variable como un objeto matemático. (Brizuela et al., 2015, p. 25). Además, argumentaron que la introducción temprana de la notación en las expresiones matemáticas de los niños pueden ofrecerles oportunidades de desarrollar una mayor familiaridad y fluidez a la hora de usar esta convención para representar relaciones matemáticas.

Otros estudios han mostrado que los niños a temprana edad son capaces de comprender y derivar ecuaciones de situaciones de resolución de problemas, por ejemplo, Brizuela y Schliemann (2004) en un estudio longitudinal con 70 estudiantes, en cuatro salones de clase, desde segundo a cuarto grado (7 a 8 años, y de 9 a 10 años, aproximadamente), el cual fue diseñado para promover la comprensión de ecuaciones lineales, funciones, tablas de funciones y gráficos de funciones lineales. Los resultados indicaron que "un tercio de los niños usaron una expresión algebraica para representar el problema, y más de un tercio de los niños incluyeron una letra para representar uno o más de los valores desconocidos." (Brizuela & Schliemann, 2004, p. 8). Además de ello, sugieren que más de la mitad de los niños representaron correctamente las cantidades en el problema usando letras para representar cantidades desconocidas.

De acuerdo con Brizuela (2013), desde 1998 la implementación de actividades sobre álgebra temprana y la documentación del aprendizaje algebraico en edades tempranas ha mostrado que,

> "la introducción del álgebra como parte del currículo de matemáticas es bastante factible y tiene incluso claridades en cómo específicamente las herramientas representacionales como tablas, gráficos, notación numérica y algebraica pueden ser empleados en ayudar a los estudiantes a expresar relaciones funcionales entre números y cantidades" (p. 6).

En un estudio realizado por Carraher, et al. (2006), se encontró que "los estudiantes jóvenes, de entre nueve y diez años, pueden hacer uso de ideas y representaciones algebraicas que por lo general están ausentes del plan de estudios de matemáticas inicial y se cree que están fuera del alcance de los estudiantes" (Carraher, et al, 2006, p. 2).

Carraher et al. (2006) afirmaron que, con el tiempo, los estudiantes usaron cada vez más las notaciones algebraicas y las representaciones de líneas numéricas como un medio natural para describir los eventos de los problemas que les presentaron (Carraher et al., 2006, p. 23). Además, concluyen que, de acuerdo a las experiencias obtenidas, los niños entre ocho y nueve años pueden aprender a usar las letras para representar valores desconocidos y pueden operar en representaciones que involucran letras y números sin tener que crear instancias de ellos. A su vez, los niños pudieron operar con valores desconocidos y sacar conclusiones acerca de estas operaciones sin dejar de darse cuenta de que no conocían los valores de las incógnitas.

En el caso de las ecuaciones derivadas de situaciones problema verbales matemáticas, que conllevan a un proceso de generalización, también se ha encontrado que niños de primero a sexto grado pueden desarrollar representaciones escritas para problemas algebraicos y, con la ayuda del entrevistador, resolver problemas de ecuaciones lineales usando diferentes estrategias de solución (Lins Lessa, 1995; Brito Lima y da Rocha Falcio, 1997; citado en Carraher, et al., 2006) .

Por ejemplo, Brizuela y Lara-Roth (2001) realizaron un estudio longitudinal durante tres años, con un grupo de 39 estudiantes entre ocho y diez años, desde segundo hasta cuarto grado. Los autores encontraron que los niños de segundo desarrollaron representaciones tabulares sofisticadas de los datos presentados en un problema de la progresión del dinero ganado con el tiempo (Brizuela & Lara-Roth, 2001). Además, que los niños incorporaron en sus representaciones, las características de las tablas de funciones convencionales en las que se evidenció que los niños logran ubicar en las filas el dinero gastado y en las columnas el paso del tiempo. Esto a su vez, de acuerdo con las autoras, permite descubrir las concepciones y comprensiones que los niños tienen sobre las relaciones aditivas (Brizuela & Lara-Roth, 2001). Lo anterior resulta de utilidad para las tareas usadas en la presente investigación, pues los niños al establecer las relaciones de correspondencia deben establecer relaciones y operaciones explícitas entre las cantidades, sean éstas aditivas o multiplicativas.

Estos hallazgos acerca de las habilidades algebraicas de los niños entre seis y diez años aproximadamente, son una muestra de cómo en edades tempranas es posible encontrar el desarrollo representaciones y habilidades que propicien una mayor comprensión a la hora de resolver problemas de naturaleza matemática. Sobre todo, justifica la necesidad de implementar en edades tempranas la experiencia de aprendizaje del álgebra con el fin de promover el uso de formas de pensamiento intuitivo que permita a los estudiantes superar las dificultades que se les presenta, cuando se implementa el álgebra formalmente.

A su vez, se relaciona con el problema de esta investigación en tanto que evidencia cómo la introducción de múltiples representaciones matemáticas como herramientas semióticas, en el inicio de la escolarización, facilita la comprensión de ideas algebraicas complejas, a las que tradicionalmente se han diseñado en los planes curriculares de las matemáticas en primaria. Esto resalta la importancia de las diversas formas en las que se puede acceder al álgebra, ya sea a partir de la notación de expresiones algebraicas o de representaciones tabulares. En el caso de la notación algebraica la intervención temprana es relevante ya que los niños con el uso de esta forma de representación pueden desarrollar una mayor familiaridad y fluidez a la hora de representar relaciones matemáticas. Asimismo, propiciar el uso de las representaciones gráficas y tabulares es importante en la medida en que muestran cómo los niños establecen correspondencias y relaciones entre variables (Brizuela & Earnest, 2008); lo cual permite concluir que dichas habilidades algebraicas que involucran el uso de diversas formas de representación (notación algebraica y tablas) son necesarias para el pensamiento algebraico de los niños.

También es necesario resaltar la pertinencia de los contextos en los que los problemas de naturaleza matemática son puestos; es decir, las situaciones de resolución de problemas que implican contextos extramatemáticos, donde se propicia que los niños sean capaces de entender las variables puestas en juego, para de esta manera reconocer el objeto matemático que se intenta expresar en el problema. Un ejemplo de ello se puede encontrar en el estudio de Cañadas, et al. (2015), en el que los niños fueron capaces de recontextualizar el problema que se les presentó en un contexto físico (e.g. sobre el número de personas que podían sentarse en las sillas que estaban distribuidas en diferentes mesas), en un contexto puramente matemático para lo cual se definió la expresión $y=2x$.

Lo anterior supone que exponer a los niños a situaciones de resolución de problemas con contextos extramatemáticos, exige por parte de ellos una demanda cognitiva mayor, y además un proceso de recontextualización que implica reconocer que los niños comprenden la estructura de las funciones detrás del problema que se les presente.

Los resultados aquí presentados permiten reconocer los niños a edades tempranas cuentan con habilidades algebraicas que indican el desarrollo temprano del pensamiento algebraico y funcional, el cual podría emerger en situaciones de naturaleza funcional, en la que los niños puedan interactuar. Esto claramente implica que las situaciones de resolución de problemas, por sí solas, y con la ayuda de preguntas orientadoras en el marco del análisis de tareas y de las entrevistas clínicas basadas en tarea, pueden elicitar razonamientos elaborados ligados a esas formas de pensamiento, sin acudir a tratamientos como la instrucción directa del álgebra temprana. Es por ello, que para la presente investigación se da un lugar relevante a los ambientes de aprendizaje, cuyo dominio específico esté relacionado con las matemáticas y las ciencias naturales.

3.2. Marco teórico

En el apartado anterior, los antecedentes mostraron algunas de las habilidades algebraicas asociadas al pensamiento funcional y las diferentes formas de representación matemática (e.g. tablas, notación algebraica) a las cuales los niños pueden acceder para facilitar su pensamiento algebraico. Dado que el interés fue la caracterización de las trayectorias que tomó la emergencia de las formas de pensamiento funcional, se partió del supuesto de que estas formas de pensamiento varían y cambian en el transcurso de las sesiones, y dentro de cada sesión durante la resolución de los problemas. Se habla de emergencia cuando surge un fenómeno, a saber el pensamiento funcional, cuando se crea una instancia de conceptos, formas de pensamiento, habilidades, por primera vez (Davidson, 1999).

Esto además permite ubicar la investigación en el marco de los planteamientos teóricos del modelo de las olas traslapadas de Siegler (2007), el cual se basa en tres supuestos, a saber:

> "(a) en cualquier momento, los niños piensan de varias maneras sobre la mayoría de los fenómenos; (b) estas formas variadas de pensar compiten entre sí, no sólo durante breves períodos de transición, sino más bien durante períodos de tiempo prolongados; y (c) el desarrollo cognitivo implica cambios graduales en la frecuencia de estas formas de pensar, así como la introducción de formas de pensar más avanzadas."

Esto debido a que la variabilidad es evidente en el nivel de las reglas, estrategias, teorías y demás unidades de cognición de nivel superior. Además, el uso de este marco teórico supone reconocer la necesidad de describir con precisión el cambio cognitivo (Siegler, 2007). Para abordar el cambio y las trayectorias de desarrollo, se tuvo en cuenta las cinco dimensiones: trayectoria, ritmo, amplitud, variabilidad y fuentes de cambio. De acuerdo con Siegler (citado en Sánchez, Guevara y Cerchiaro, 2013), la trayectoria está asociada a las secuencias regulares de estrategias o conocimientos que se manifiestan a lo largo de las sesiones;

> "el ritmo alude a la velocidad con que ocurre el cambio; la amplitud se refiere al nivel de generalización de otros conceptos o habilidades relacionados; la variabilidad remite a las diferencias individuales en relación con las tres dimensiones anteriores, y las fuentes del cambio hacen referencia a los mecanismos que lo hacen posible" (Sánchez, et. al, 2013, p. 295)

4. Metodología

4.1. Contexto y población

El estudio tuvo lugar en dos contextos específicos de aprendizaje. La primera parte se llevó a cabo en un contexto escolar, en una institución educativa pública, de la ciudad Santiago de Cali, en la cual participaron dos niños y dos niñas entre siete y ocho años de edad (M= 7,5). La segunda parte se realizó en un contexto no formal de aprendizaje, el Parque Zoológico de Cali, en el marco de una experiencia museística itinerante, en la cual participaron seis niños y cuatro niñas entre siete y ocho años de edad (M=7,5).

4.2. Tipo de investigación

En términos de la coherencia con los propósitos de la presente investigación, se utilizaron dos estrategias metodológicas, a saber, un estudio de caso múltiple y un estudio de caso embebido, en aras de lograr identificar cómo el pensamiento funcional puede emerger en niños de edades tempranas, a partir del uso de múltiples representaciones, en contextos formales y no formales de aprendizaje, a través del uso de un ambiente de aprendizaje diseñado previamente para la investigación. Esto debido a que en la literatura la mayoría de las investigaciones se han realizado en el aula, a través de la instrucción directa de los contenidos que se enmarcan en el modelo del Álgebra Temprana; en contraste, el diseño del presente estudio, no se enfoca en la instrucción directa como estrategia para que estas formas de pensamiento emerjan, sino en cómo a través de ambientes de aprendizaje que involucran múltiples representaciones, modalidades sensoriales y múltiples discursos pueden emerger formas intuitivas de pensamiento funcional, sin la presencia de la instrucción directa, propia de un contexto formal de aprendizaje.

4.2.1. Diseño microgenético: Estudio de caso múltiple

El método principal de la primera parte del estudio para responder al objetivo uno fue el diseño microgenético. La elección de este tipo de diseño se definió por la necesidad de entender "cómo" emergen estas distintas formas intuitivas de pensamiento funcional a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta un considerable volumen de datos, analizados detalladamente. Además, surgió a raíz del interés de caracterizar las trayectorias de desarrollo de los participantes durante la resolución de problemas.

Se diseñó un ambiente de aprendizaje para analizar la emergencia y cambio de las tres formas de pensamiento funcional, en un periodo corto de tiempo, para ambos contextos. Para el diseño de las tareas del ambiente de aprendizaje, se utilizó el Análisis Cognitivo de Tareas, teniendo en cuenta su estructura, demandas cognitivas y niveles de desempeño potenciales para cada tarea. Para el análisis y la presentación de los resultados se utilizó el estudio de caso múltiple, esto debido a que en los estudios de caso múltiple se puede abarcar múltiples casos, brindando la posibilidad de compararlos (Yin, 2014, p. 62).

De acuerdo con Yin (2014), los casos se eligen en un estudio de casos múltiple cuidadosamente con el fin de (a) predecir resultados similares, (b) o de predecir resultados contrastantes por razones previsibles, a partir de una replicación teórica. Teniendo en cuenta la lógica de replicación que implica un estudio de caso múltiple, se tuvieron en cuenta para este estudio cuatro casos. Cada caso individual, como sostiene Yin (2014) consistió en un estudio completo, sobre el cual se buscó reflejar que los casos fueran similares, y además demostrar las proposiciones relacionadas al desarrollo de formas intuitivas de pensamiento funcional en edades entre los 7 y 8 años.

4.2.2 Experiencia museística itinerante

La segunda parte del estudio se dio por la necesidad empírica de investigar el pensamiento algebraico, específicamente en la emergencia de las formas intuitivas de pensamiento funcional, en el marco de una experiencia museística, en los que los grupos de visitantes pudieron enfrentarse a una tarea que implicó estos tipos de razonamiento, sin la mediación de un agente educativo a través de la instrucción directa.

Para este estudio, se eligió el Análisis Cognitivo de Tareas como el método más pertinente para el análisis de los desempeños de los participantes al resolver la situación problema "El río Oikos está en problemas". Para la presentación de los resultados, la estrategia metodológica involucró un estudio de casos embebido ya que cada participante constituye una subunidad de análisis o unidades embebidas (Yin, 2014, p. 55), a los cuales se les realizó el análisis del desempeño real, teniendo en cuenta las rúbricas de desempeño que surgieron a raíz de las demandas cognitivas desarrolladas para la tarea "El río Oikos está en problemas". Dada las características de los museos, no se puede contar con la participación individual de los niños, pues la mayoría de las veces estos recorren las exhibiciones en grupos, razón por la cual fue necesario usar esta estrategia metodológica.

4.3. Diseño de la investigación

4.3.1 Instrumentos: ambiente de aprendizaje "El río Oikos está en problemas"

Uno de los instrumentos correspondió al modelo tridimensional del que se habló anteriormente. Éste se aplicó en la fase de la experiencia museística, y en las dos primeras sesiones del diseño microgenético. El propósito educativo de la tarea, que llamaremos 'El río Oikos está en problemas' es brindar una situación de acceso inclusivo, en la cual se propicie la emergencia de formas intuitivas de pensamiento funcional en un contexto multivariable de ciencias. Como submetas de aprendizaje se buscó que los niños lograran:

1. Identificar variables que influyen en la contaminación del río.
2. Generalizar las relaciones entre los fuentes de contaminación y el nivel de contaminación del río, a través de diferentes representaciones matemáticas.
3. Propiciar reflexiones acerca de las prácticas apropiadas para el buen uso y cuidado de los ríos.

En esta tarea se buscó que los participantes lograran acceder al conocimiento algebraico a través del juego. Para esta situación, el uso de un modelo tridimensional" privilegió la interactividad con la tarea, a partir del uso de múltiples representaciones y de modalidades sensoriales. Las modalidades sensoriales, a su vez, destacan el uso de habilidades visuales y hápticas. con el fin de que éste pudiera identificar las variables; identificar la relación entre ellas; y generalizar la regla que deviene de dichas relaciones, a partir del uso de múltiples representaciones y de modalidades sensoriales. Las múltiples representaciones hacen referencia al modelo tridimensional, es decir, al formato concreto en el que se presenta la tarea; y a las representaciones matemáticas tabulares y notacionales. Las modalidades sensoriales, a su vez, destacan el uso de habilidades visuales y hápticas, las cuales se privilegian en la naturaleza misma del modelo tridimensional. Este modelo es la representación física e interactiva de un contexto multivariable de las ciencias naturales, constituida por un río y tres diferentes fuentes de contaminación: contaminación por ciudades, contaminación por industrias de talas de árboles y contaminación por cultivos (Ver tabla 4.1).

Otro aspecto que propició la interactividad en esta situación de resolución de problemas es la asignación de roles a los participantes como "Científicos" que deben encontrar el nivel de contaminación de un río, registrando los valores correspondientes a sus descubrimientos en una tabla de funciones.

Tabla 4.1 Descripción física de la tarea

Materiales (cantidad)	Descripción
Maqueta (1)	Una maqueta con dimensiones de 125 cm de largo, 71 cm de ancho y 21 cm de alto, conformada por un río, cinco cultivos, cuatro ciudades y tres industrias de talas de árboles. La maqueta maneja un mecanismo hidráulico que permite la elevación de cada cultivo, ciudad e industria con su respectiva placa en el río.
Río (1)	Un río que atraviesa toda la maqueta, cuya superficie está constituida por placas que están conectadas a cada fuente contaminación. Cada placa representa el nivel de contaminación por cada fuente mediante relieves rectangulares. Estos relieves representan el valor para cada fuente: un relieve para la contaminación por cultivos, dos relieves para la contaminación por industrias de talas de árboles y tres relieves para la contaminación por ciudades.
Cultivos (5)	Cada cultivo tiene dimensiones aproximadamente de 10 cm de largo, 10 cm de ancho y 1mm de alto. En la superficie del cultivo se encuentran cuatro ranuras, que serían la característica principal para que los niños puedan identificarlo. Cada cultivo está conectado con una placa del río, y en dicha placa se encuentra a través de un relieve rectangular la representación del valor que tiene esta fuente de contaminación (1).
Industrias de tala de árboles (3)	Cada industria de tala de árboles tiene dimensiones aproximadamente de 10 cm de largo, 10 cm de ancho y de alto. En la superficie se encuentran tres cilindros acostados que representan árboles talados; ocho árboles con copas, que serían la característica principal para que los niños puedan identificarlo. Cada industria de tala de árboles está conectada con una placa del río, y en dicha placa se encuentra a través de un relieve rectangular la representación del valor que tiene esta fuente de contaminación (2).
Ciudades (2)	Cada ciudad tiene dimensiones aproximadamente de 10 cm de largo, 10 cm de ancho y de alto. En la superficie de cada ciudad se encuentran 16 cubos que representan las casas. Cada ciudad está conectada con una placa del río, y en dicha placa se encuentra a través de un relieve rectangular la representación del valor que tiene esta fuente de contaminación (3).
Tabla de descubrimientos	Para el registro de los valores correspondientes a la representación matemática tabular.

Figura 4.1. Maqueta, “El río Oikos está en problemas”

Nota: Foto tomada durante la experiencia museística en el Zoológico de Cali.

4.3.1.1. Tareas isomorfas

El resto de tareas que se aplicaron en el marco del diseño microgenético, como ya se ha mencionado, tienen una estructura isomorfa a la tarea "El río Oikos está en problemas", con la diferencia de que éstas no tuvieron una representación física interactiva, sino que se presentaron en formato verbal, con la ayuda visual en formato escrito de algunos elementos contextuales de la tarea como la "cantidad de basuritas" correspondiente a cada fuente de contaminación. Además, estas tareas tuvieron a su vez distintos niveles de complejidad que aumentaron de una sesión a otra. Este aumento en la complejidad se dio de la siguiente manera: (a) Las tareas de las sesiones 1, 3, 5 y 7, son isomorfas, pero varían en la "cantidad de basuritas", es decir, en la constante de la función mx=y, lo cual aumenta la complejidad en el sentido de que la correspondencia entre las variables implican un mayor desafío. (b) Las tareas de las sesiones 2, 4, 6 y 8, al igual que las sesiones impares son isomorfas entre sí; sin embargo, varían en la cantidad de fuentes de contaminación que influyen en el río al mismo tiempo. Así, la estructura de las tareas que se aplicaron a lo largo de las sesiones tuvieron en cuenta los siguientes elementos estructurantes y niveles de desempeño:

Tabla 4.2. Elementos estructurantes de la tarea

Tarea	**Elemento estructurante**
1	Familiarización con los elementos contextuales de la tarea Verbalización de la regla (Pensamiento covariativo)
2	Representación tabular, a partir de la identificación de las relaciones de correspondencia entre las variables
3	Expresión escrita de la regla, a través de la notación algebraica: generalización
4	Descubrimiento del nivel de contaminación del río

Tabla 4.3. Rúbricas de desempeño

Tareas	Niveles potenciales de desempeño en la tarea
Pensamiento covariativo	A. Identifica las fuentes de contaminación y las basuritas como elementos de la tarea, cada una como cantidades independientes. B. Identifica las variables Cantidad de fuentes de contaminación y Cantidad de contaminación, y la constante (cantidad de basuritas); sin embargo, la relación que se establece entre ellas depende de los elementos contextuales de la tarea C. Discrimina el cambio en las propiedades físicas del río al bajar cada una de las palancas. Identifica las variables cantidad de fuentes y Cantidad de contaminación. Discrimina el cambio en cada una de las variables, pero no establece una relación implícita entre las variables cantidad de fuentes y Cantidad de contaminación. D. Discrimina el cambio físico y establece la relación entre la fuente y la basura en el río. Identifica las variables cantidad de fuentes y Cantidad de contaminación. Identifica y verbaliza una relación explícita entre las variables cantidad de fuentes y Nivel de contaminación (ej. "Hay más contaminación cuando salen más cultivos").
Relaciones de corresponde ncia	A. Identifica el cambio sobre las cantidades de manera independiente, y lo registra usando elementos contextuales de la tarea. B. Identifica las cantidades como variables de manera independiente. Registra el cambio en la tabla de descubrimientos usando elementos contextuales de la tarea. C. Identifica patrones implícitos en el cambio que establece sobre las variables, pero no utiliza operaciones explícitas entre las variables. D. Registra los valores correspondientes de las cantidades que varían. Identifica las relaciones de correspondencia entre las variables, utilizando operaciones y relaciones explícitas entre las cantidades, y es capaz de hacerlo sobre cantidades más grandes.
Notación algebraica	A. No usa símbolos aritméticos tradicionales, informales o idiosincráticos para representar matemáticamente el cambio. Declara la regla verbalmente. B. Las regularidades o patrones las expresa a través del gesto o la verbalización. Cuando se le pide al niño que escriba la fórmula, escribe las cantidades precisas para cada tarea, a través de símbolos aritméticos. C. Sí transforma semióticamente los numerales por literales en expresiones análogas, pero no comprende los literales como variables. D. Sí transforma semióticamente los numerales por literales en expresiones análogas, y comprende los literales como variables.

En la tabla 4.3 puede encontrarse los niveles de desempeño para el pensamiento covariativo, las relaciones de correspondencia y la notación algebraica. Cada nivel representa una forma de pensamiento específica, en la cual el nivel D es el más alto e implica elaboraciones y formas de pensamiento más complejas que aquellos encontrados en un nivel A. Las diferencias de un nivel a otro están relacionadas con el carácter explícito con el que se expresan las generalizaciones, y con la capacidad de generalizar sobre cantidades cada más grandes. En las rúbricas de desempeño para la tarea de Pensamiento Covariativo el nivel D implica una identificación y generalización explícita de las variables y de la relación entre estas. La diferencia entre un nivel C y un nivel D, para todas las tareas, es la capacidad de establecer explícitamente la regla, y la capacidad de operar sobre cantidades mayores en las cuales se pueda generalizar.

4.3.2 Diseño del estudio microgenético

Este diseño constó de ocho sesiones, específicamente dos sesiones por semana (Ver tabla 4.4). Las dos primeras sesiones constituyeron la línea de base, en la cual se dio lugar a la fundamentación de los sistemas de representación convencionales propios del dominio del álgebra temprana, a partir de la aplicación de una tarea llamada “El río Oikos está en problemas”. Las problemas que se presentaron a lo largo de las ocho sesiones fueron de estructura isomorfa a la estructura de la tarea “El río Oikos está en problemas”, con la diferencia de que éstas fueron problemas verbales. Se decidió que fueran de estructura isomorfa con el fin de que se pudiera comparar las trayectorias intra e inter sujeto.

En las dos primeras sesiones se realizó el mismo diseño que he llamado línea de base, en el apartado anterior, con el fin de que los niños del contexto de aprendizaje formal contaran con la fundamentación necesaria para acceder a las formas de representación matemática que tienen un carácter convencional. Esto, en consonancia con los objetivos de este estudio, en los cuales se busca que la emergencia de las formas intuitivas de pensamiento puedan darse a través del uso de múltiples representaciones.

Tabla 4.4 Diseño del estudio microgenético

Sesión	Tarea	Duración	Semana
1	Línea de base: "El río Oikos está en problemas"	30:00 - 60:00	1
2	Línea de base: "El río Oikos está en problemas"	30:00 - 60:00	1
3	"El río Oikos está en problemas", con variación en la cantidad de "basuritas" (donde la función mx=y, m es la cantidad que varía) por fuente de contaminación	30:00 - 60:00	2
4	"El río Oikos está en problemas", con variación en la cantidad de "basuritas" (donde la función mx=y, m es la cantidad que varía) por fuente de contaminación; con variaciones en cantidad de fuentes presentes en el río (e.g. ciudades, cultivos e industria de tala árboles al mismo tiempo).	30:00 - 60:00	2
5	"El río Thedus está en problemas", con variaciones en la cantidad de "basuritas" (donde la función mx=y, m es la cantidad que varía); con variaciones en las fuentes de contaminación.	30:00 - 60:00	3
6	"El río Thedus está en problemas", con variaciones en la cantidad de "basuritas" (donde la función mx=y, m es la cantidad que varía); con variaciones en cantidad de fuentes presentes en el río (e.g. ciudades, cultivos e industria de tala árboles al mismo tiempo).	30:00 - 60:00	3
7	"Las ranas están en peligro", con variaciones con variaciones en la cantidad de "basuritas" (donde la función mx=y, m es la cantidad que varía); con variaciones en las fuentes de contaminación.	30:00 - 60:00	4
8	"Las ranas están en peligro", con variaciones con variaciones en la cantidad de "basuritas" (donde la función mx=y, m es la cantidad que varía); con variaciones en las fuentes de contaminación; con variaciones en cantidad de fuentes presentes en el río.	30:00 - 60:00	4

4.3.3 Diseño de la experiencia museística

En este diseño se privilegió dos etapas que facilitaron la familiarización con una tarea de naturaleza extra-matemática, representada en un modelo tridimensional y la fundamentación de la representación matemática tabular necesaria para propiciar la emergencia de formas intuitivas de pensamiento funcional, en un contexto no formal de aprendizaje. La familiarización correspondió a la identificación de las propiedades físicas de la maqueta, a través de diferentes modalidades sensoriales visuales y táctiles, con el fin de que lograran identificar los elementos estructurantes (e.g. contexto de la tarea, variables, relación entre variables) de la tarea relacionados con un problema de naturaleza funcional.

Asimismo, esta intervención correspondió al proceso de seguimiento del aprendizaje de un sistema de representación convencional propio del dominio del álgebra como la representación tabular. En este particular, la aplicación de la tarea "El río Oikos está en problema" en un contexto de aprendizaje no formal, se constituye como uno de los ambientes de aprendizaje que se pretende promover, en concordancia con el objetivo general de la investigación.

Dada las condiciones del contexto no formal de aprendizaje, y por la naturaleza museística del mismo, cada participante interactuó solo con una de las fuentes de contaminación, es decir, que de todo el ambiente de aprendizaje, cada participante resolvió una situación problema específica, en la cual solo se desarrolló las tareas de "pensamiento covariativo", "relaciones de correspondencia" y "nivel de contaminación". Para esta segunda parte del estudio, la tarea de la "notación algebraica" no se realizó, pues ésta forma de pensamiento requiere de al menos una breve instrucción, dada la convencionalidad de la representación.

4.4. Estrategias de recolección de datos

La principal estrategia de recolección de los datos necesarios para esta investigación se dio a través del uso de Entrevistas Basadas en las Tareas, la cual es definida como un encuentro uno-a-uno entre un entrevistador, quien tiene un agenda de investigación particular y un tema específico, en el cual se proponen situaciones o problemas generalmente problemáticos en los que el entrevistado debe alentarse para que pueda resolverlos, explicarlos y simplemente pensarlos (diSessa, 2007, p. 3). De acuerdo con diSessa (2007), la entrevista se da en voz alta, mientras el entrevistado usa cualquier material que esté a mano para explorar la situación y explicar su pensamiento. A su vez, otra estrategia usada para la recolección fue las videograbaciones, con el fin de que se pudieran observar detalladamente los gestos y respuestas verbales de los niños. Para ello, fue necesario el uso de transcripciones literales, con el fin de realizar la respectiva codificación de los datos.

Para la revisión y seguimiento del uso de representaciones matemáticas tabulares y notacionales se usó registro físico. Este tipo de estrategias se realizaron a lo largo de todas las sesiones.

4.5. Estrategias de análisis de datos

4.5.1 Estrategias de análisis de datos del diseño microgenético

El análisis de los datos se dio a partir de la codificación de las Entrevistas Basadas en las Tareas (diSessa, 2007), recogida en cada de una de las sesiones en la que participaron cuatro sujetos en el contexto escolar. Esta categorización se dio a partir de la identificación de formas de razonamiento intuitivo que aparecían durante la resolución de los problemas a los cuales fueron enfrentados los participantes, a lo largo de las diferentes sesiones, para la primera parte del estudio. Estas formas intuitivas de pensamiento funcional, en el marco del álgebra temprana, se identificaron a partir del uso de rúbricas de desempeño (Ver tabla 4.3), en los cuales se fue ubicando las diferentes respuestas que los participantes registraban de manera verbal o escrita.

En el diseño microgenético, la codificación y puntuación se realizó para cada una de las ocho sesiones en las que participaron los niños. Los datos ya codificados se analizaron a través de líneas de tiempo, con el fin de caracterizar las trayectorias de desarrollo para cada caso, teniendo en cuenta las diferencias, en términos de la variabilidad, y los cambios en los diferentes tipos de análisis:

1. Análisis intra-sujeto: con el fin de caracterizar las trayectorias de desarrollo, a partir de las líneas de tiempo, observando la variabilidad y el cambio durante todo el diseño microgenético, para cada caso.
2. Análisis inter-sujeto con el fin de comparar las trayectorias de desarrollo, en términos de la variabilidad y el cambio en la emergencia de las formas intuitivas de pensamiento funcional.

4.5.2. Estrategias de análisis de datos de la experiencia museística

El análisis de los datos, al igual que en el diseño microgenético, se dio basado en las codificaciones de las transcripciones que surgieron de las entrevistas basadas en las tareas, en la que participaron 10 sujetos, a lo largo de la experiencia museística, para el estudio de caso embebido. En el estudio de caso embebido, la codificación y puntuación se realizó para cada subunidad de análisis, haciendo el análisis de tarea para cada participante. Los análisis de tareas se agruparon de acuerdo a las similitudes en las formas de pensamiento, y se presentaron a través de perfiles. Los criterios de agrupación fueron la similitud en los desempeños que obtuvieron para cada tarea.

5. Resultados

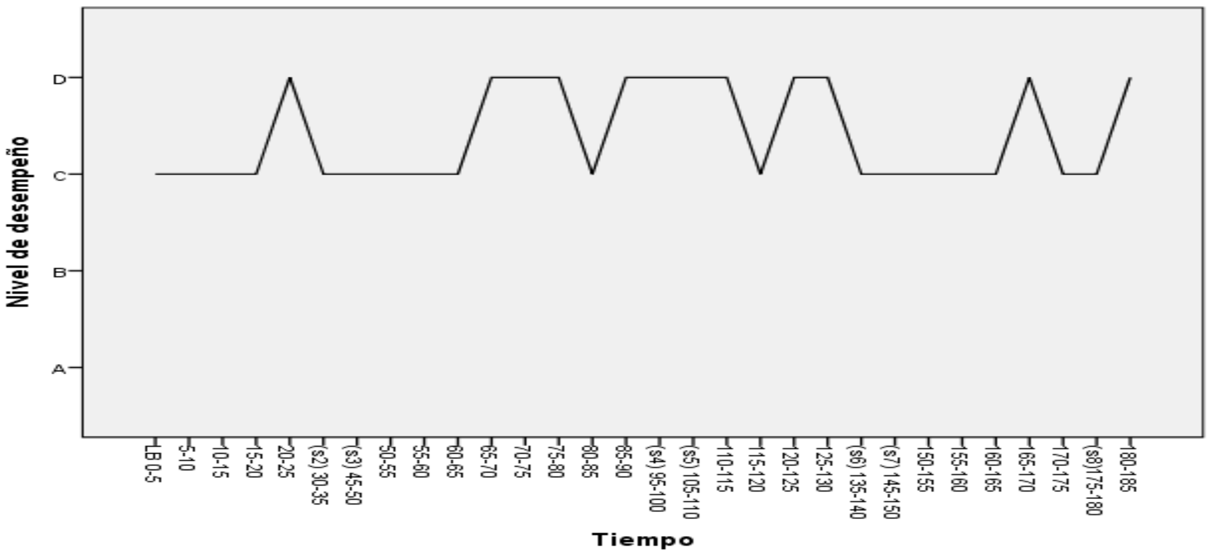
5.1. Resultados del diseño microgenético: Estudio de caso múltiple

Los resultados en este apartado se presentarán a través de casos, cada uno con su respectivos análisis de las trayectorias, incluyendo ejemplos que permitirán nutrir el análisis sobre las formas de pensamiento funcional para cada habilidad. Cada habilidad aquí reportada surge del análisis de los desempeños que los niños tuvieron, teniendo en cuenta las rúbricas de los desempeños (Ver tabla 4.3) para las tareas Pensamiento covariativo, Relaciones de Correspondencia y Notación algebraica.

5.1.1. Caso LP

A partir del gráfico 5.1.1, se puede afirmar que durante las ocho sesiones en las que LP participó en la resolución de las tareas del *pensamiento covariativo,* el desempeño varió entre los niveles C y D. Los cambios más relevantes de un nivel a otro, se lograron observar cuando las generalizaciones que LP realizaba se dieron con un carácter explícito y para todas las cantidades que se le presentaron en la situación extramatemática; es decir, la forma en cómo la niña establecía la regla difería en si la relación existente entre las variables era explícita, implícita, o ausente. Por ejemplo, si la regla que LP estableció incluía la relación entre cantidad de contaminación y cantidad de fuentes de contaminación (e.g. cuando hay más ciudades, hay más contaminación), el carácter de la regla es explícito; si la regla es implícita, lo cual hace la diferencia entre un nivel C y D, un ejemplo de la verbalización sería "hay más contaminación, porque hay mucha basura".

Gráfico 5.1.1 Trayectoria de desarrollo de la habilidad “Pensamiento covariativo”



Puede verse que desde el minuto 5 al minuto 20, en el cual finaliza la línea de base, LP se mantuvo constante en el nivel C, ya que lograba identificar las variables y el cambio que se producía en ella, pero no llegaba a la regla de manera verbal y explícita. Un ejemplo de lo anterior se ve en los primeros cinco minutos, de la sesión 1.

Situación “Cultivos”: Hay cinco cultivos y cada cultivo echa una “basurita” al río:

E: muy bien, más contaminado, entonces sube el tercero. ¿Ahora qué notaste?
LP: que hay tres contaminaciones.
E: Ahora sube el cuarto cultivo
LP: hay cuatro contaminaciones
E: ok, y el río está cómo está ahora?
LP: más contaminado
E: ¿por qué está más contaminado?
LP: porque las personas echan mucha basura
(Nota: LP es el seudónimo de la niña del presente caso. E, hace referencia al entrevistador.)

Entre los minutos 20 y 25, LP logra ubicarse en un nivel de desempeño D, porque verbaliza la regla en la que se establece la relación entre las variables. El carácter de la generalización no es de un nivel experto, pero sí tiene los suficientes elementos que permiten reconocer la emergencia de las formas de pensamiento que para este estudio son una prioridad. Esto lo podemos encontrar en el siguiente fragmento:

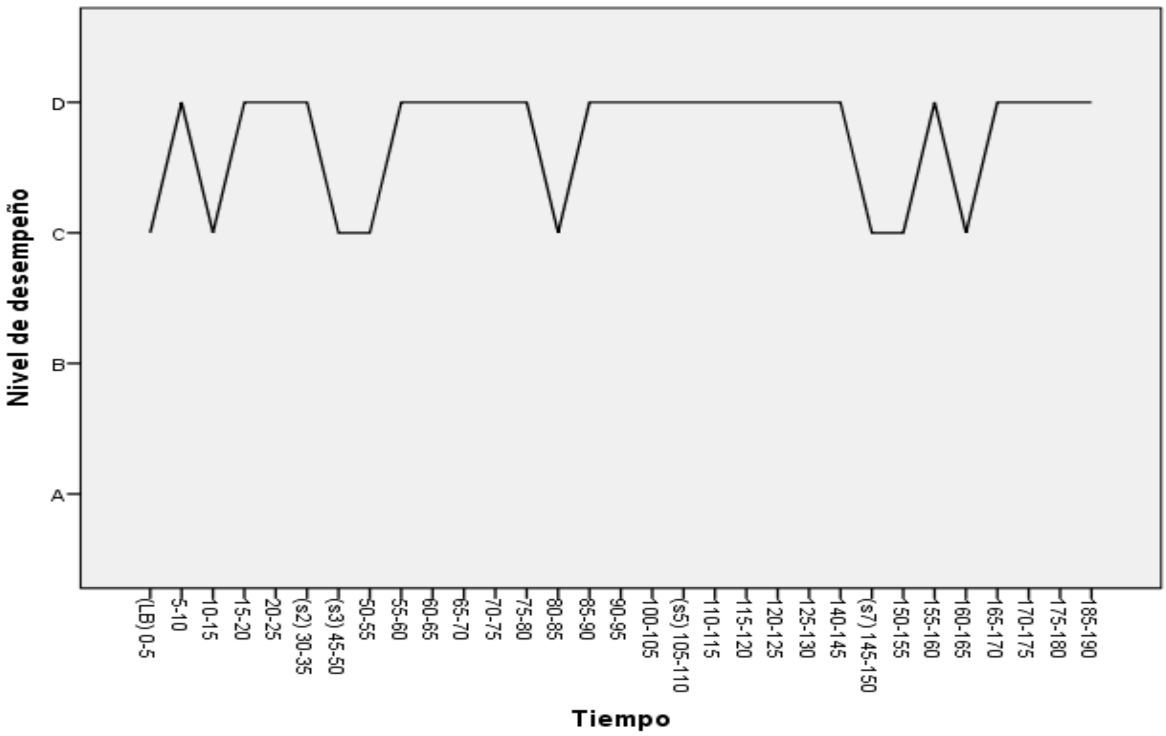
Situación “Ciudades”: Hay 4 cuatro ciudades, y cada ciudad echa tres “basuritas” al río:

E: ¿la cantidad de ciudades influye en la cantidad de contaminación?

LP: porque las personas mantienen comiendo en el río, y dejan la cantidad de basura en el río
E: ajá, y a medida que hay más ciudades ¿qué pasa en el río?
LP: Se contamina mucho y el río se va agotando
E: ¿o sea que la contaminación aumenta cuando aumenta ___? ¿La contaminación del río por qué aumenta?
LP: por las personas
E: listo, estas son las ciudades. ¿La contaminación es la misma cuando hay cuatro a cuando hay una ciudad?
LP: se contamina más cuando hay muchas ciudades
E: cuando hay muchas ciudades, ¿cierto? ¿Entonces la contaminación del río aumenta cuando aumenta qué?
LP: Cuando hay muchas ciudades y hay mucha basura.

En el minuto 35 – 40, el cambio del nivel D al C se da debido a que la niña no generaliza explícitamente la regla. La relación que establece entre las variables es implícita, pues reconoce el aumento de la contaminación, a medida que aumenta las basuras, pero no la establece teniendo en cuenta el aumento de la cantidad de fuente de contaminación. Es decir, lo que en esta función es una constante, la niña lo usa también como una cantidad que varía (e.g. “las basuras aumentan”).

Gráfico 5.1.2 Trayectoria de desarrollo de la habilidad “Relaciones de correspondencia” durante las sesiones



En esta habilidad de “relaciones de correspondencia”, se encontró que el desempeño de LP (ver gráfico 5.1.2) también varía entre los niveles C y D, aunque para este caso logre establecer en una mayor cantidad de veces relaciones explícitas de correspondencia. Para esta habilidad, la trayectoria tiene varias períodos de estabilidad, en la cual se mantiene en un nivel de desempeño C. Los períodos de cambio se pueden observar cuando LP pasa de un nivel C a un nivel D, y viceversa, la mayoría de las veces por el carácter explícito de la correspondencia dada para función mx=y. Con el siguiente fragmento se podrá observar las dos formas de pensamiento para cada nivel de desempeño.

Para el nivel de desempeño C, en el minuto 10 – 15. Situación “Ciudades”: cada ciudad echa tres “basuritas” al río:

E: Si hay 10 (ciudades), ¿cuánta contaminación habría?
LP: 10? 10...13
E: 13? Estás segura, segura?
LP: Sí,ségurísima.
E: Si solo cuando hay 6 ciudades la contaminación es 18, ¿cuándo hay 10 habría 13? ¿Habría menos contaminación?
LP: Habría más contaminación

- Para el nivel de desempeño D, en el minuto 15 – 20, Situación “Ciudades”, cuando cada ciudad echa tres “basuritas” al río:

E: Si hay tres ciudades, y vas a multiplicar, ¿qué multiplicas? si hay 7 ciudades, y vas a multiplicar, ¿qué multiplicarías?
LP: 7 por 3
E: ¿y por qué por 3? Está bien, pero ¿por qué por 3?
LP: porque está contaminando 3

La diferencia entre esas dos formas de pensamiento se da en el momento en que LP entiende que la constante “cantidad de basuritas” siempre es el valor que debe multiplicarse o sumarse con la cantidad de fuente de contaminación para cada caso. En la primera forma de razonamiento, la niña va de tres en tres, lo cual significa el reconocimiento de patrones recursivos. Sin embargo, decide sumarle tres a la cantidad de ciudades, en vez de sumarle tres a la cantidad de contaminación que ya tenía registrada para el caso de las 9 ciudades. En un nivel de desempeño D, el sujeto debe reconocer cada variable, y establecer una relación explícita y una operación clara sobre ella, ya sea para el caso de la adición o la multiplicación.

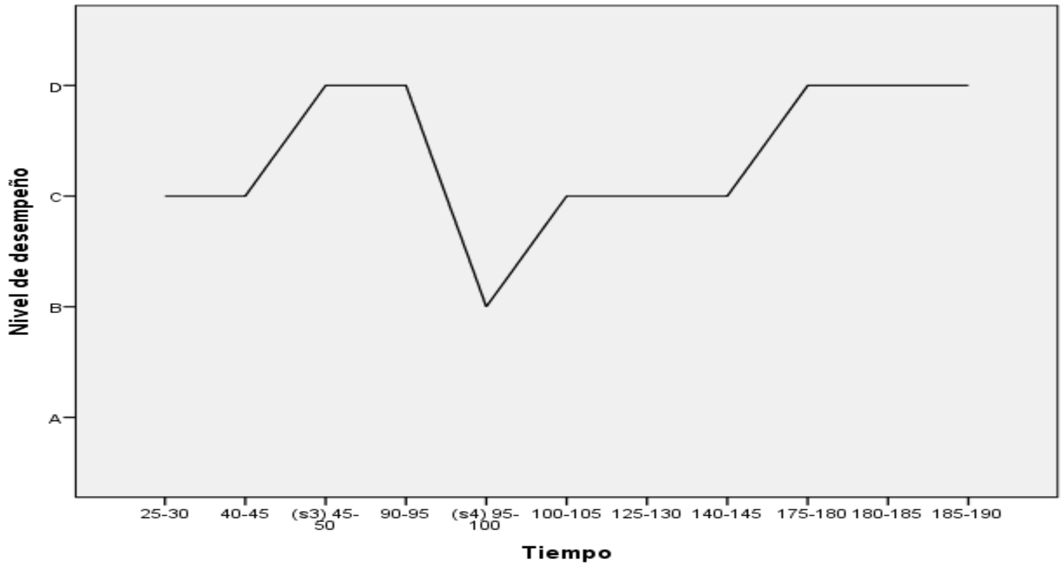
Además de esto, vemos que en la trayectoria la niña se mantiene en un nivel de desempeño D desde el minuto 60 al minuto 135, los cuales conforman las sesiones 3, 4 y 5. El cambio a una forma de pensamiento al nivel C, en el minuto 140 se da porque la niña no logra usar patrones recursivos para cantidades más grandes (e.g. "ir de dos en dos"), cuando se le pide la cantidad de contaminación cuando hay más de 10 industrias de tala de árboles.

LP muestra mayor variabilidad en la habilidad "notación algebraica"(ver gráfico 5.1.3.) porque la trayectoria de desarrollo para esta habilidad se da en tres niveles de desempeño. Las formas de pensamiento que explican estos cambios están relacionados con cómo LP usa la letra para representar cada fuente de contaminación como una etiqueta o como una variable. El uso de la literal o letra como una etiqueta, implica un nivel de desempeño C, dado que la expresión de la regla no es totalmente explícita. Una forma de pensamiento tipo D puede verse en el siguiente fragmento, de la sesión 3, entre los minutos 45 y 50, en la cual se busca el sujeto realice la notación de la regla o generalización previamente encontrada:

Tarea "Notación algebraica", para todas las situaciones (Ciudades, Industria de tala de árboles y cultivos):

E: ¿Cómo lo harías?
LP: Ah sí… 5 X C
E: ¿y eso es igual a qué?
LP: es igual a…
E: ¿qué hallamos?
LP: La contaminación
E: y ¿qué letra le damos a la contaminación?
LP: la S
E: Ahora para los cultivos, ¿cómo sería?
LP: 3 x D
E: y eso es igual a
LP: S
E: muy bien, ahora en la industrias
LP: 4 x R igual a S
E: eso, perfecto

Gráfico 5.1.3. Trayectoria de desarrollo de la habilidad "Notación algebraica" durante las sesiones



Otro cambio relevante que debe destacar se da entre el minuto 90:00 y el minuto 100:00, en el cual la niña pasa de un desempeño D a tener un desempeño B. Como ya se ha mencionado, en un desempeño B las regularidades y patrones expresados en la regla se dan a través del gesto o la verbalización. Es evidente la identificación que la niña realizó de las variables, y la relación que ésta hace con las etiquetas asignadas a cada una. Sin embargo, se refiere a cada fórmula solo por la etiqueta, y no da cuenta de la relación de correspondencia entre las variables a partir de operaciones explícitas, como puede verse en el siguiente fragmento, de la sesión 4, entre los primeros cinco minutos, en la cual la consigna busca que el sujeto realice la notación de la regla para el caso de las tres fuentes que contaminan al mismo tiempo el río:

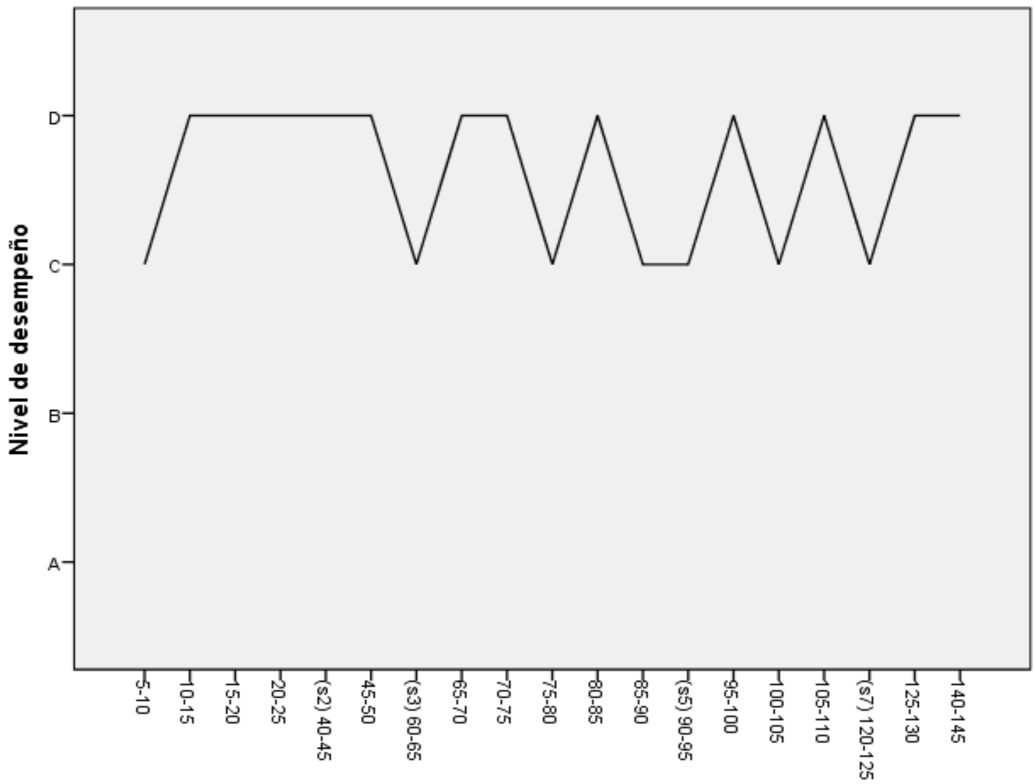
E: entonces con estos resultados ¿cómo lo sumarías?
LP: Sumando las s, los resultados
E: pero queremos hallar la fórmula para dárselos a otros científicos. Recuerdas que lo hicimos en la oficina del coordinador? ¿Qué fórmulas sumaste?
LP: Sumé estos
E: ajá
LP: c, d y r

El anterior fragmento es un ejemplo de nivel de desempeño B porque está usando las letras como etiquetas que representan a cada variable o fuente de contaminación, y no como variables que se encuentran en relación con tras. Un desempeño ideal, para comparar este nivel B, se vería si LP hubiese notado la regla de la forma "5C + 4R + 3D = S", teniendo en cuenta las fórmulas o reglas que ya había notado en la sesión anterior (ver fragmento que ejemplifica el nivel de desempeño D).

5.1.2. Caso OA

El gráfico 5.2.1 muestra cómo el desempeño de OA para la habilidad de "Pensamiento covariativo" presentó diferentes cambios a lo largo de las sesiones. Dichos cambios se ven reflejados en los niveles C y D, que como ya se ha mencionado anteriormente, están relacionados con formas de pensamiento en las que el niño pueda generalizar para todos los casos la regla o relación existente entre las variables.

Gráfico 5.2.1. Trayectoria de desarrollo de la habilidad "Pensamiento covariativo" durante las sesiones



En el siguiente fragmento se puede encontrar un nivel desempeño C, pues hay una relación implícita cuando, pese a no verbalizarla, expresa que a la cantidad de contaminación se le ha sumado una basura más al aparecer un cultivo más.

Sesión 1, Situación “cultivos”, cuando cada cultivo echa una “basurita” al río, durante los minutos 5 y 10:

E: entonces vamos a presionarlo, y ahora qué pasó, ¿qué sentiste?
OA: otra basurita
E: muy bien, otra basurita, y ¿notaste alguna diferencia cuando habían solo dos cultivos?
OA: sí, que se sumó uno.

El cambio a un nivel de desempeño D en los siguientes cinco minutos se da porque el niño logra la generalización de la regla de manera explícita:

E: cada que aparece un cultivo ¿qué pasa?
OA: se contamina más
E: entonces ¿cuál es la relación que hay?
OA: entonces la relación que hay es que cada que sube un cultivo se suma una basurita más, y se contamina más todo

En el minuto 70 también podemos encontrar una forma de pensamiento tipo C, en el momento en que el niño responde que “si hay menos es mejor, si hay más es peor”, expresando implícitamente que la contaminación es mayor cuando hay más industrias de tala de árboles.

En general, los cambios que se presentan en esta trayectoria muestran que las formas de pensamiento de OA de manera implícita o explícita permiten la identificación de las variables “cantidad de fuentes de contaminación” y “Cantidad de contaminación”, de la constante “Cantidad de basuritas”, de los cambios que ocurren sobre ellas y de las relaciones que se pueden establecer entre sí, cuando la consigna busca que el sujeto encuentre la cantidad de contaminación.

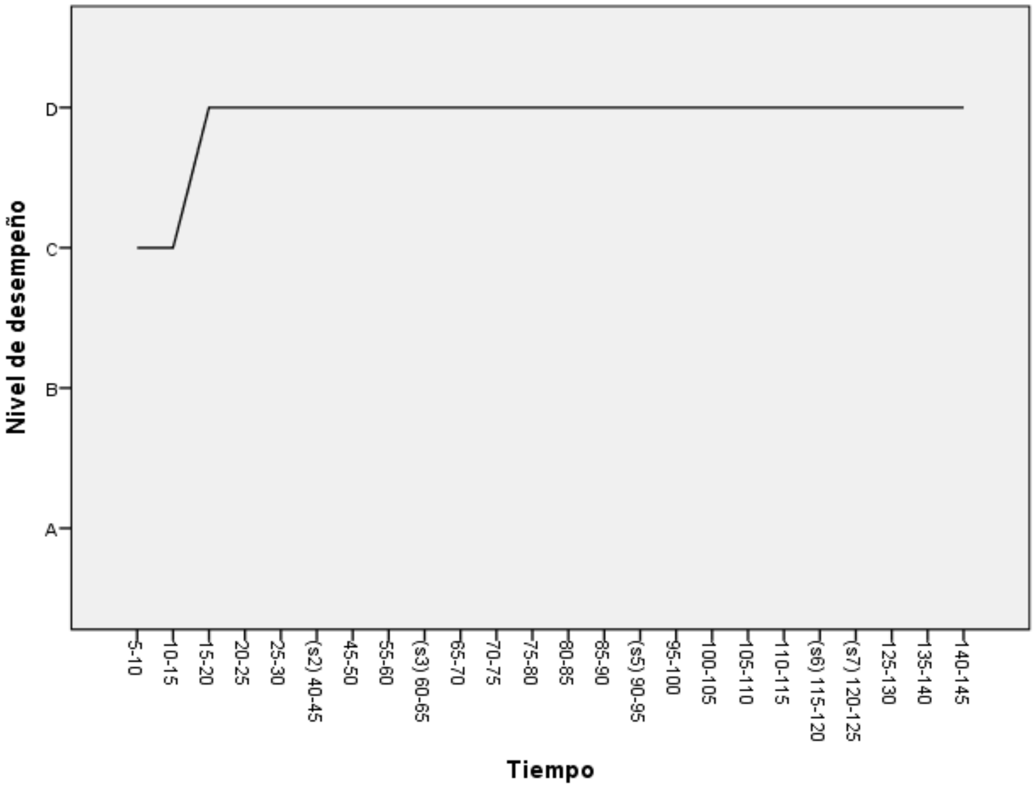
Para la habilidad de “relaciones de correspondencia” (ver gráfico 5.2.2), se puede encontrar poca variabilidad en las formas de pensamiento, en la cual el único cambio relevante se da en el minuto 15, cuando pasa de un nivel C a un nivel desempeño D . Un fragmento que ejemplica el único momento en el que OA alcanza un nivel de desempeño C, se da cuando la correspondencia entre las variables “cantidad de cultivos”, “Cantidad de basuritas por cultivo” y “cantidad de contaminación” no está dada explícitamente:

> E: Entonces te voy a pedir que presiones la segunda jeringa. Sube la segunda jeringa
> OA: otro cuadrito
> E: salió otro cuadrito, y sentiste alguna diferencia?
> OA: la única diferencia que sentí, es que aquí hay una y aquí hay otra
> E: entonces cuántas basuritas hay?
> OA: hay 2
> E: entonces qué es lo que vamos a escribir aquí en la tabla. Cuando había una cuántas basuritas había?
> OA: 1
> E: cuando había 2
> OA: 1
> E: entonces cuando hay dos, en total cuánta cantidad de contaminación hay?
> OA: 2

El cambio en las formas de pensamiento de un nivel de desempeño C a uno D se logra cuando OA establece relaciones de correspondencia explícitas entre las variables, reconociendo además la constante “basuritas” y los cambios que ocurren sobre las variables “cantidad de fuente de contaminación” y “cantidad de contaminación”. Esto puede verse en el siguiente fragmento:

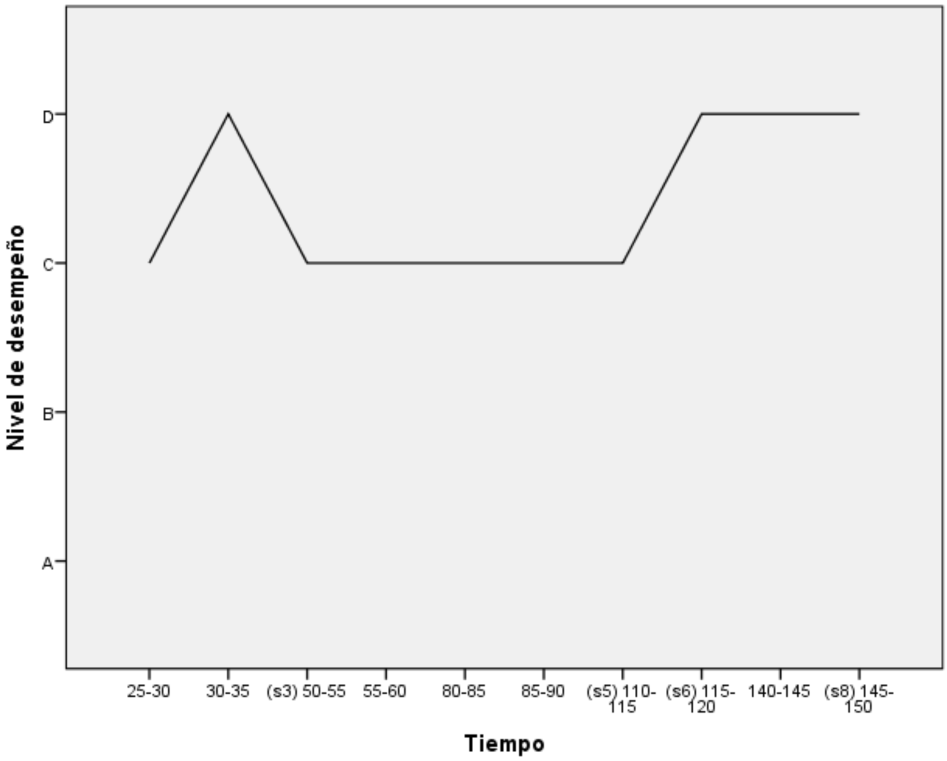
> E: y ahora sube la tercera ciudad, y ¿notas alguna diferencia cuando solo habían dos ciudades?
> OA: la diferencia es que había menos
> E: y ¿por qué había menos?
> OA: porque había menos ciudades
> E: porque había menos ciudades, muy bien
> OA: y tres más seis es igual a 9
> E: y ¿por qué estás sumando tres?
> OA: porque cada ciudad bota tres basuritas

Gráfico 5.2.2. Trayectoria de desarrollo de la habilidad “Relaciones de correspondencia” durante las sesiones



Si bien la operación que se establece es aditiva, OA identifica que la constante para esta situación problema es tres. En el nivel D uno de los indicadores está relacionado con establecer la regla mx=y a partir de operaciones explícitas entre las cantidades; en este caso, la operación aritmética no marca la diferencia entre un nivel y otro, sino la forma de pensamiento a la que el niño es capaz de llegar de manera explícita. Por esa razón, aunque el niño llegue a la respuesta a través de la suma, se tiene en cuenta que OA haya identificado la relación entre la cantidad de ciudades con su respectiva constante (tres basuritas) para hallar la cantidad de contaminación, pues es evidente cuando dice que suma tres porque “cada ciudad bota tres basuritas”.

Gráfico 5.2.3. Trayectoria de desarrollo de la habilidad “Notación algebraica” durante las sesiones



El gráfico 5.2.3 muestra varios periodos de estabilidad en el nivel de desempeño C, en el uso de la habilidad “notación algebraica”. Aquí también se puede encontrar formas de pensamiento entre los niveles C y D. El siguiente fragmento permite observar uno de los cambios relevantes de un nivel C a un nivel de desempeño D que se presenta en el minuto 30. Sesión 1, consigna relacionada con la búsqueda de la fórmula general, para el caso en el que se encuentran las tres fuentes (e.g. ciudades, cultivos e industrias de tala de árboles) contaminando al río al mismo tiempo:

> E: ven, ¿la C qué representa?
> OA: la de cultivos
> E: la D
> OA: de industrias
> E: y éste
> OA: de 3 basuritas, o sea que las ciudades contaminan tres basuritas.

En el anterior fragmento vemos cómo OA a cada literal o letra le asigna una variable, e identifica que el 3 que aparece en la regla escrita representa la cantidad de basuras que cada ciudad echa al río a medida que aparece en el País Oikos. Este forma de pensamiento permite ubicar el desempeño en un nivel D, porque reconoce cada letra como una variable y no como una etiqueta. Otro momento relevante de cambio que puede destacarse se encuentra en el minuto 115, en el cual podría decirse se encuentra la emergencia de una forma de pensamiento más complejo, pues logra reemplazar cada letra con sus respectivas cantidades, lo cual puede asumirse como la habilidad de usar las letras como variables:

OA: M son las ciudades… 5 por M
E: y si tengo 4, cómo sería esta fórmula?
OA: 5 por 4

5.1.3. Caso DA

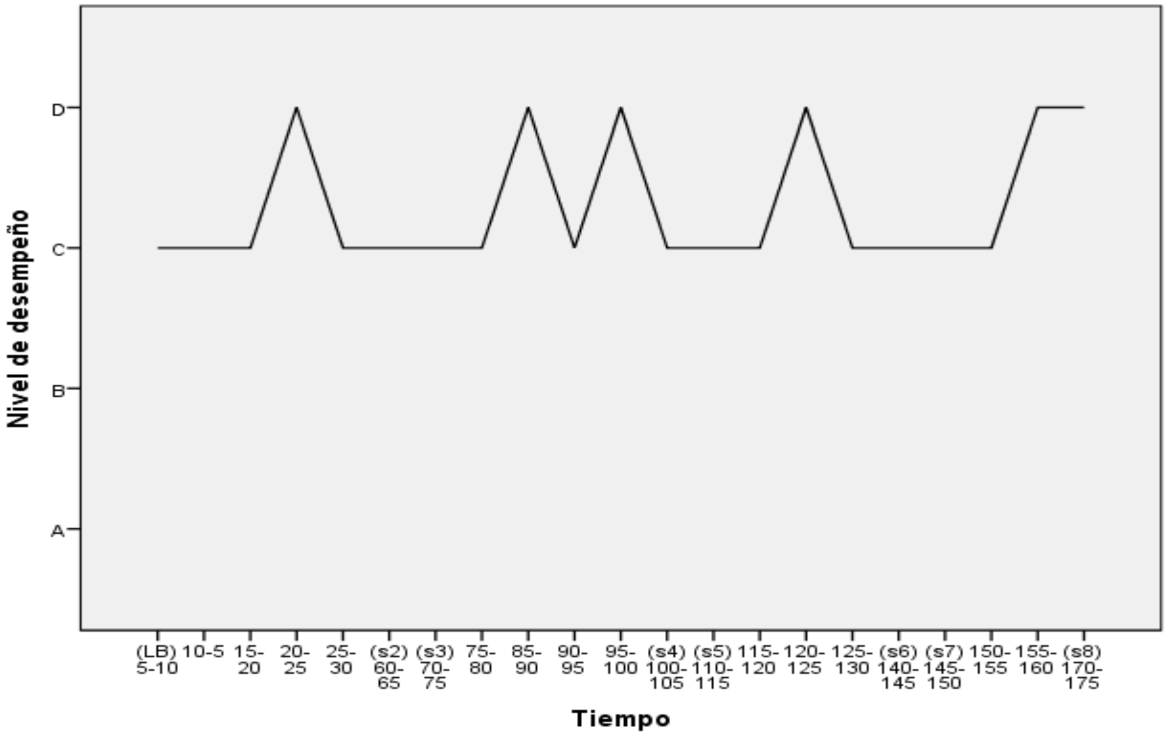
En el gráfico 5.3.1, se encuentra también variaciones durante las ocho sesiones entre los niveles de desempeño C y D, con periodos de estabilidad en el nivel de desempeño C. Los cambios observables en este caso, para la habilidad de "Pensamiento covariativo" están relacionados con la verbalización de la regla, identificando las variables presentes en el problema y estableciendo la relación determinada.

Para ejemplificar alguno de los momentos relevantes en los que emergen formas de pensamiento de un nivel de desempeño C, se puede observar el siguiente fragmento, de la sesión 7, en el minuto 145, donde cada unidad de atrazina arroja dos "basuritas" al río. Este fragmento es un ejemplo de una forma de pensamiento de un nivel de desempeño C, pues aunque no sea explícita la relación, se evidencia que DA ha identificado las variables y usa una covariación entre éstas para responder a la pregunta sobre cuál es la cantidad de contaminación:

Situación "Atrazina": por cada unidad de atrazina, al río caen dos basuritas.

E: cuando hay una atrazina cuál es la cantidad de contaminación?
DA: una atrazina, dos
E: cuando hay dos?
DA: cuando hay dos son 4

Gráfico 5.3.1. Trayectoria de desarrollo de la habilidad "Pensamiento covariativo" durante las sesiones



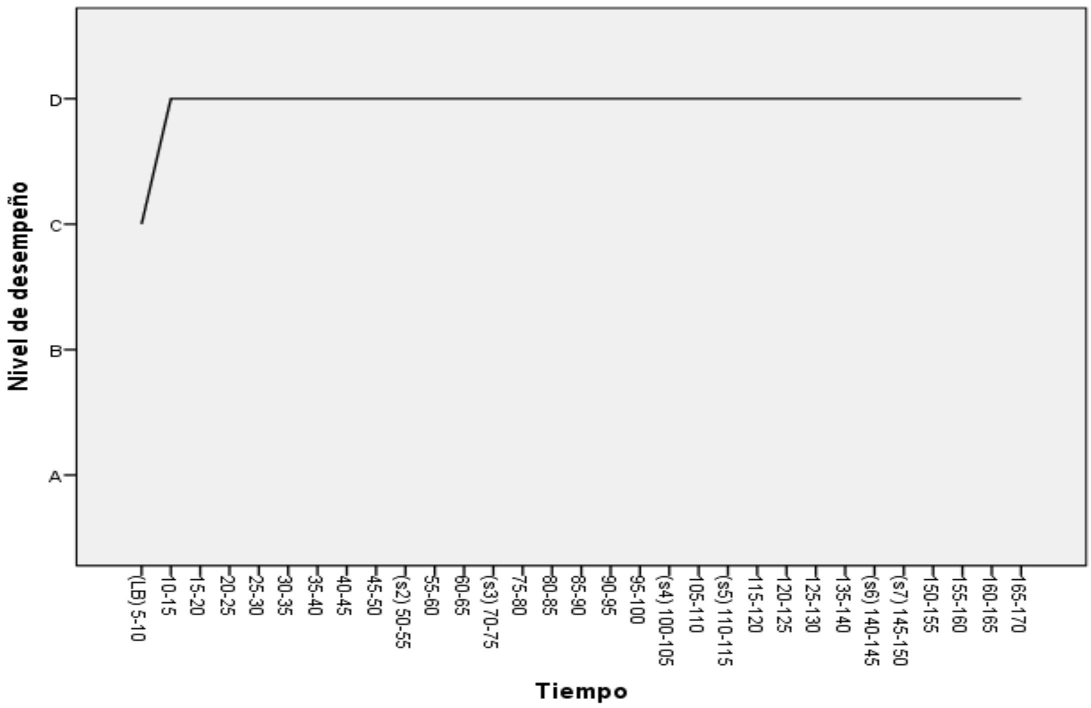
La forma de pensamiento en un nivel de desempeño D se puede ejemplificar con el siguiente fragmento. Sesión 1, Situación "cultivos", donde cada cultivo echa una "basurita" al río, durante el minuto 20:

E: ¿cuándo es diferente, cuándo es mayor?
DA: cuando van siendo más cultivos
E: entonces ¿la cantidad de contaminación es mayor cuando qué'
DA: cuando sembramos más cultivos
E: y ¿es menor contaminación cuando qué?
DA: cuando hay menos cultivos
E: entonces ¿cuál sería la relación ahí?
DA: la relación es que si hacemos más cultivos hay más contaminación en el agua, pero si hacemos menos cultivos hay menos contaminación en el agua

Esta forma de pensamiento covariativo "la relación es que si hacemos más cultivos hay más contaminación en el agua, pero si hacemos menos cultivos hay menos contaminación en el agua" puede ubicarse en el nivel de desempeño D pues implica el reconocimiento de la covariación entre las variables "Cantidad de fuentes de contaminación" y "cantidad de contaminación". A diferencia de otras respuestas en las que se responde que la cantidad de contaminación es mayor cuando "hay más basuras". Si bien en ese tipo de respuestas se identifica la noción de aumento en la contaminación, la relación que se establece en términos de qué variable influye a cuál es errada. En este caso, DA sí hace explícita dicha generalización. En el minuto 155 se puede encontrar una respuesta similar, en la cual también se da la emergencia de una forma de pensamiento de un nivel de desempeño D, en la sesión 7, durante la Situación "Trematodos", donde cada trematodo echa tres "basuritas" al río. La consigna busca que el sujeto identifique verbalice la relación:

E: ¿las ranas por qué mueren?, en el caso de los trematodos
DA: mueren porque hay más fuentes de contaminación

Gráfico 5.3.2. Trayectoria de desarrollo de la habilidad "Relaciones de correspondencia" durante las sesiones

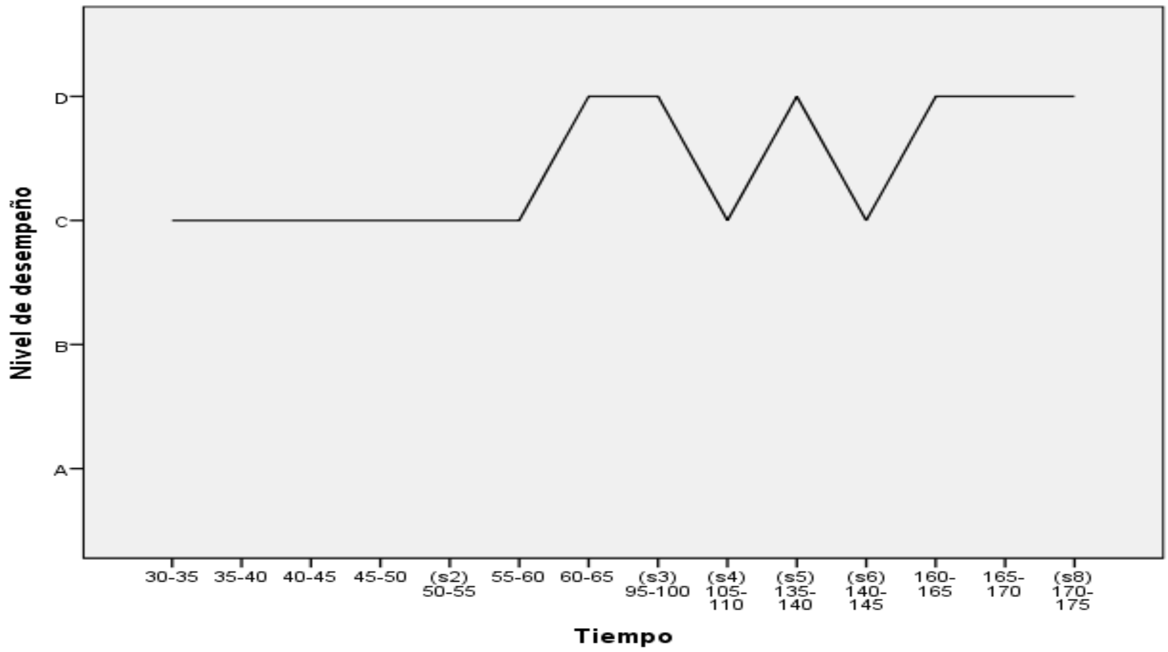


El gráfico 5.3.1 no muestra cambios relevantes en las formas de pensamiento funcional de , sin embargo, se destaca cómo logra ubicarse en un nivel de desempeño D, pues logra establecer explícitamente la correspondencia entre las variables, y hace el registro adecuado de los valores en la "Tabla de Descubrimientos". El siguiente fragmento da cuenta de lo anterior. Este fragmento hace parte de la sesión 1, durante la situación "Industria de tala de árboles", donde cada industria arroja dos "basuritas" al río, entre los minutos 25 y 30:

E: entonces oprime la primera jeringa. Ahora ¿qué pasó en el río?

DA: se contaminó el doble
E: muy bien, entonces ¿cómo lo escribirías en tu tabla?
DA: el doble
E: entonces oprime la segunda
DA: sería el cuatriple
E: ajá, muy bien
E: ahora sube la tercera industria
DA: ahora sería el “sextiple” de la contaminación

Gráfico 5.3.3. Trayectoria de desarrollo de la habilidad “Notación algebraica” durante las sesiones



En la trayectoria de la habilidad “notación algebraica” se puede encontrar diferentes cambios en el desempeño de la niña al momento de enfrentarse a la tarea de “notación algebraica”, a lo largo de las sesiones. Podemos encontrar también variaciones entre los niveles de desempeño C y D, y un largo periodo de estabilidad en un nivel de desempeño C, entre los minutos 30 y 60. El siguiente fragmento es un ejemplo de cómo la forma de pensamiento funcional asociada al uso de la representación notacional es de tipo C:

E: la T es la cantidad de contaminación, y ¿el 1 qué es?
DA: no sé
E: ¿cada que sale un cultivo qué sale?
DA: una contaminación

La niña en el anterior fragmento entiende las literales como etiquetas para representar a cada variable. En ese momento, es capaz de establecer la correspondencia entre las variables, pero no logra llevar la generalización que realiza verbalmente a una forma de expresión escrita, en términos algebraicos. Una forma de pensamiento del nivel de desempeño D, en el cual logra ubicarse es el siguiente, cuando se le pide la fórmula para la Atrazina, en la sesión 7, durante los minutos 160 y 165:

> P: A por 2 = T porque primero se pone la letra de ésta, luego la basurita que bota y después siempre igual a T

Un ejemplo de cómo DA generaliza la regla para la notación de las fórmulas para cada fuente de contaminación se puede observar en el siguiente fragmento, de la sesión 3 durante los minutos 95 y 100, donde se le pide hallar la fórmula para fuente de contaminación:

> E: ¿cómo sería la fórmula para los cultivos?
> DA: cultivos… 3 por c
> E: eso muy bien
> DA: 3 por c igual a T
> E: ahorita la de las ciudades
> DA: fórmula ciudades…listo, 5 por b igual a T
> E: muy bien
> DA: y ahora fórmula industrias, a ver industrias…4 por a igual a T

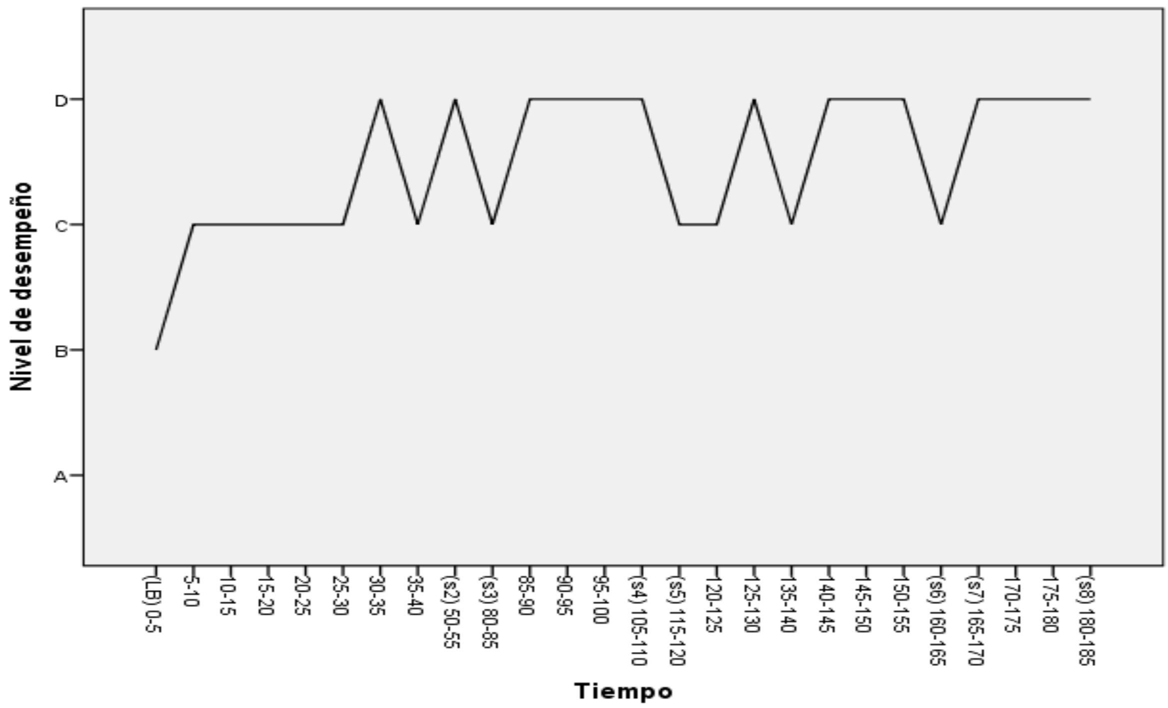
5.1.4. Caso EM

El gráfico 5.4.1 muestra variabilidad en la trayectoria de desarrollo de la habilidad de “pensamiento covariativo”, incluso mostrando formas de pensamiento que se ubican en un nivel de desempeño B, en el cual solo se logra la identificación de las variables y del cambio sobre cada una de las variables, de manera independiente, y dicha relación se establece sobre los elementos contextuales de la tarea. Un ejemplo de ello se puede ver en el siguiente fragmento, de la sesión 1, en los primeros cinco minutos de la situación “cultivos”, donde cada cultivo arroja una “basurita” al río:

> E:Y si cae una basurita al río, ¿qué pasa en el río?
> EM: le siguen echando químicos
> E: ajá, y ¿entonces el río cómo está?

EM: seco
E: y además de seco, ¿en qué estado está el río? ¿cuál es tu misión en este juego? ¿qué tienes que encontrar?
EM: no sé
E: tienes que encontrar la cantidad de contaminación. Entonces cada que le echas una basurita al río, ¿qué le pasa al río?
EM: se va secando
E: y se
EM: va muriendo
E: y se contamina. Sube el otro cultivo, y ahora toca el río. ¿Qué está pasando en el río? Ahora que subió el otro cultivo
EM: hay otra basura más

Gráfico 5.4.1. Trayectoria de desarrollo de la habilidad "Pensamiento covariativo" durante las sesiones



Otro cambio puede encontrarse entre los 5 y 25, en los cuales hay un cambio en las formas de pensamiento. El nivel de desempeño C está dado porque EM identifica las variables, reconoce el cambio en las cantidades y establece de manera implícita la relación que hay entre ellas. Sin embargo, no verbaliza explícitamente dicha relación al decir que la contaminación aumenta a medida que aumenta la cantidad de fuentes de contaminación.

A partir del minuto 30, las variaciones ocurren entre los niveles de desempeño C y D, también por cambios relacionados entre la capacidad de hacer explícita o implícita la generalización. Un ejemplo de un desempeño D se puede encontrar en los siguientes fragmentos, de la primera sesión, en la cual la consigna busca que se verbalice la regla, identificando la relación entre las variables “cantidad de ciudades”, “cantidad de basuritas” y “cantidad de contaminación”.

- Primer fragmento:

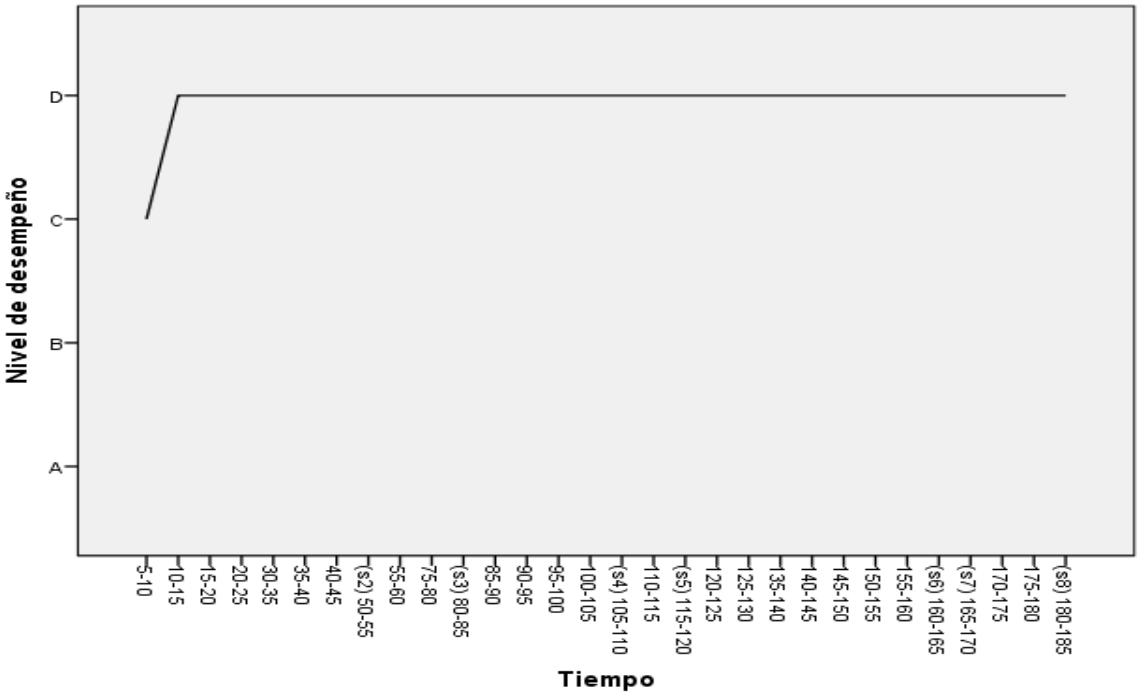
  E: entre más ciudades salga, ¿qué pasa en el río?
  EM: se va llenando más de basura, de contaminación, y si sale otra ciudad, y si vuelven a armar otra ciudad se va contaminando más.

- Segundo fragmento:

  E:Muy bien, entonces ¿qué está pasando en el estanque con los trematodos?
  EM: Se están muriendo más
  E: y ¿cuándo mueren más las ranas?
  EM: cuando echan más veneno
  E: eso no es veneno
  EM: ¿entonces qué es?
  E: parásito
  EM: eso

En la trayectoria de desarrollo de la habilidad “relaciones de correspondencia no presenta variabilidad entre las formas de pensamiento relacionadas con habilidad para establecer relaciones de correspondencia, sino un largo periodo de estabilidad en el nivel de desempeño D.

Gráfico 5.4.2. Trayectoria de desarrollo de la habilidad "Relaciones de correspondencia" durante las sesiones



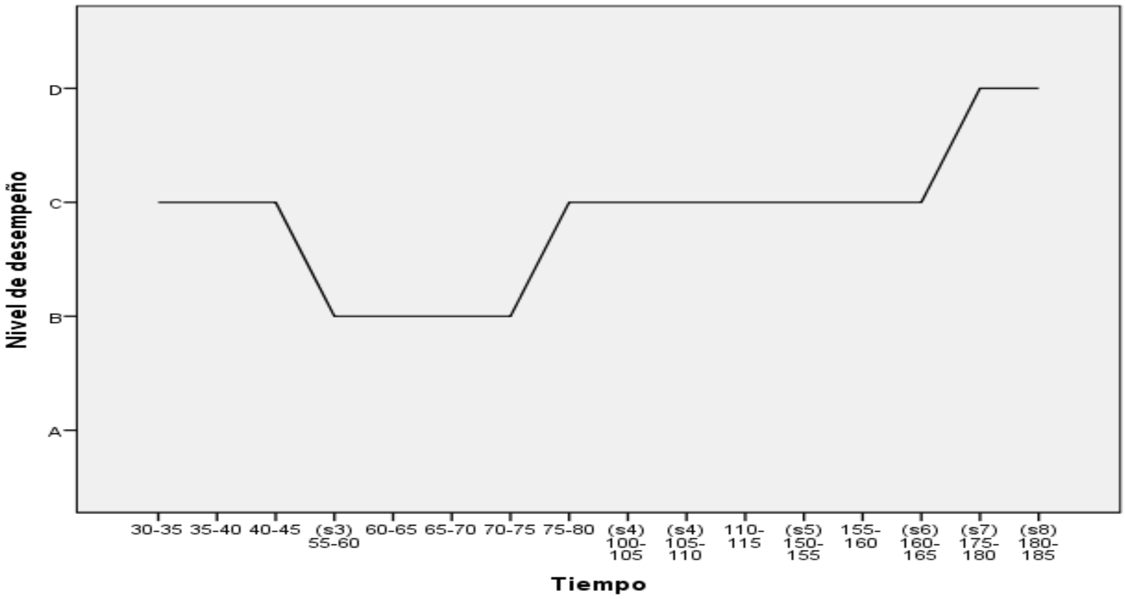
En este caso específico, el niño logra identificar las variables y establecer de manera explícita la correspondencia, la cual logra verse reflejada en el registro de los valores en la tabla de descubrimiento.

Esta correspondencia es además usada sin dificultades entre cantidades más grande, pese a que el niño aún tenga dificultades aritméticas a la hora de efectuar las operaciones. Un ejemplo de un desempeño tipo D es el siguiente:

E: ¿cuál es la cantidad de contaminación cuando tenemos 5?
EM: 13, 14, 15 (realiza la operación con los deditos)
E: muy bien, cuando tenemos 18 trematodos, ¿qué tendríamos que hacer?
EM: ¿cómo?
E: ¿si tuviéramos 18 trematodos?
EM: 3 por 18
E: eso…y ¿si tuviéramos 20?
EM: 3 por 20… 3 por 100

En el anterior fragmento, EM inicia la tarea usando operaciones aditivas, pero teniendo en cuenta la constante, que para esta situación problema es 3; además, logra mantener la correspondencia cuando las cantidades son más grandes, estableciendo a su vez operaciones multiplicativas explícitas.

Gráfico 5.4.3. Trayectoria de desarrollo de la habilidad “Notación algebraica” durante las sesiones



En el gráfico 5.4.3, los cambios se dieron entre los niveles de desempeño B, C entre el minuto 30 y el minuto 75; los cambios entre los niveles C y D se dieron entre el minuto 160 y 185. Un nivel de desempeño tipo B se da en una de las sesiones en las que las tres fuentes de contaminación se encuentran al mismo tiempo influyendo sobre la contaminación del río. Este nivel de desempeño se da debido a que entiende la regla, pero no logra transformar semióticamente a partir del uso de letras o símbolos. Un ejemplo de ello, se ve representado en el siguiente fragmento:

E: y ¿por qué la T?
EM: porque está representando los, ay cómo se llama eso
EM: los…¿eso se llama los cultivos?
E: ¿pero el 23 qué representa?
EM: una suma
E: qué representa el 23, para qué sumaste esto?
EM: para que me diera igual
E: ¿para que te diera qué?
EM: 23
E: ¿pero el 23 qué representa?
EM: ¿el 23?
E: sí, para qué sumaste todo esto. ¿Para hallar qué cosa?
EM: la contaminación
E: ¿entonces 23 qué es?
EM: la contaminación
E: ajá, cuál es la letra que representa la cantidad de contaminación
EM: 23

Además de lo anterior, también es posible observar largos periodos de estabilidad en un nivel de desempeño C, dada la dificultad en el uso de las letras como variables y no como simples etiquetas que se asignen a una cantidad determinada. Un ejemplo de ello, se puede encontrar en el siguiente fragmento, de la sesión 5, entre los minutos 30 y 35, donde se le pide al sujeto que halle la fórmula para cada fuente de contaminación:

> E: muy bien, entonces vamos a hacer la fórmula. La fórmula para la industrias
> EM: cómo es que era? Era primero hacer el número. 4 por C,
> E: la C qué significa aquí?
> EM: contaminación
> E: ¿aquí multiplicas 4 por qué?
> EM: por 1
> E: y uno ¿qué es?
> EM: la contaminación
> E: la cantidad de qué?
> EM: de ciudades
> E: estamos en industrias de tala de árboles

La forma de pensamiento funcional en la cual el niño usa representaciones notacionales asociadas a un nivel de desempeño D se puede encontrar cuando el niño usa los literales como representación de las variables, entendiendo cada elemento que conforma la regla, y es capaz de generalizarla para todos los situaciones problemas a los que se enfrente en el tiempo:

> EM: 2 por A
> E: cuál va a ser la letra de la cantidad de contaminación?
> EM: 2 por A = C
> E: cuál va a ser la letra de los trematodos?
> EM: 3 por T = C

5.1.5. Análisis intersujeto de las trayectorias de desarrollo de las habilidades

A partir de las diferentes líneas de tiempo de cada uno de los casos presentados para el estudio microgenético, es posible afirmar sobre las diferencias y similitudes que existen entre los cuatro participantes del estudio, teniendo en cuenta los cambios que toma la trayectoria de desarrollo para las tres formas de pensamiento funcional. Uno de los aspectos en los que es posible comparar es en la variación entre los niveles de desempeño C y D para la tarea del "penamiento covariativo", en la cual los cuatro niños tienden a razonar sobre generalizaciones implícitas la mayoría de las veces. Sin embargo, en cada uno de los casos fue posible encontrar similitudes en cómo un razonamiento tipo D es posible que emerja en esta clase de tareas, en las cuales se logran verbalizaciones muy elaboradas, aún para formas intuitivas de pensamiento algebraico.

Estos resultados son relevantes en la medida en que muestran cómo los niños al enfrentarse a una tarea pueden comprender las relaciones multiplicativas o aditivas, sea el caso, para funciones de la forma $y=mx$. Los cuatro niños lograron en la tarea de "relaciones de correspondencia" en la mayoría de las veces mantenerse en un razonamiento tipo D, y en la cual el uso de la representación tabular facilitó para todos los casos la comprensión de las relaciones explícitas entre las variables. Sin embargo, es notable, las diferencias en las respuestas de los niños.Si bien, la mayoría tiende a mostrar variabilidad entre niveles de desempeño C y D, las respuestas entre un niño y otro son algunas veces más elaboradas que otras.

En el presente estudio, el uso de las representaciones matemáticas para propiciar la emergencia de formas de pensamiento funcional es de suma relevancia, lo cual fue posible observar en los desempeños de los cuatro niños, claramente con diferencias muy específicas en términos aritméticos (e.g. uso de operaciones aditivas o multiplicativas). Si bien, el caso 1 es el único que muestra variabilidad en la tarea de "relaciones de correspondencia", los razonamientos se mantienen en un nivel C y D; por lo tanto puede compararse con el resto de casos en los que el desempeño se mantienen en un nivel D, pues el carácter implícito de un nivel C en el establecimiento de la regla es aún muestra de la habilidad que tiene el niño para entender la correspondencia entre variables.

En la tarea de la notación algebraica, la variabilidad de los cuatro casos también se mantiene en los niveles C y D, y muestra que las diferencias a la hora de entender las literales como variables para generalizar la regla, a pesar de la presencia de formas de pensamiento funcional, son una dificultad por la naturaleza convencional de la representación. Sin embargo, es clave destacar cómo uno de los casos, específicamente el caso EM, alcanza un periodo de estabilidad en un nivel de desempeño B, luego de haber mostrado un nivel de desempeño C. Esto podría indicar las dificultades en la habilidad que los niños tienen al momento de asociar símbolos como letras con símbolos aritméticos, entendiéndose como cantidades que varían en el tiempo.

En las trayectorias de los diferentes casos aquí presentados es posible encontrar estados variables de un nivel de desempeño a otro, la mayoría de las veces asociados al carácter explícito o implícito del uso de la habilidad; sin embargo, se pudo observar mayores estados de estabilidad, sobre todo en el nivel de desempeño C. Algunos cambios que se pueden destacar de los presentes resultados estarían asociados elementos de las tareas, por las variaciones en la complejidad, en el uso de cantidades más grandes, de un aumento en la cantidad de las variables (e.g. en las tareas de las sesiones pares).

5.2. Resultados de la experiencia museística

En el presente capítulo, se encontrará el análisis de tareas realizado a cada uno de los participantes. A partir de la estrategia metodológica usada para esta segunda parte del estudio, se presentará cada caso embebido mediante perfiles, en los cuales se analizará el desempeño real en la tarea “El país Oikos está en problemas”. Cada perfil agrupará los casos similares en cuanto a las formas de pensamiento funcional, e incluirán ejemplos específicos de las verbalizaciones de los niños durante la resolución de las tareas.

Tabla 5.2.1. Perfiles

	Perfil 1	**Perfil 2**	**Perfil 3**	**Perfil 4**
Formas de pensamiento funcional	Participantes SH, JJ, IS, JA (4)	Participantes TE, GO, JP (3)	Participante SA, SY (1)	Participante DN (1)
Pensamiento covariativo	**D**	**C**	**B**	C
Relaciones de correspondenci a	**D**	**D**	**B**	C
Nivel de contaminación	**D**	**D**	**C**	D

5.2.1 *Perfil 1*

El análisis muestra que en las diferentes fases de la tarea SH, JJ, IS y JA no tuvieron dificultades relacionadas con la emergencia de las diferentes formas de pensamiento funcional, en las cuales se destaca el pensamiento covariativo y las relaciones de correspondencia. Para la primera forma de pensamiento covariativo, se encontró que los participantes lograron identificar las variables presentes en la situación extramatemática y establecer una relación explícita entre ellas. Esa relación explícita dada por la identificación del cambio que ocurre sobre la variable "cantidad de contaminación" cuando la variable "cantidad de fuentes de contaminación" aumenta. Un ejemplo de una forma intuitiva de pensamiento covariativo en un nivel de desempeño D, se puede encontrar en el caso JJ:

E: Entonces ¿qué está pasando en el río? ¿tu qué crees que está pasando?
JJ: Se está contaminando
E: ¿Se está contaminando por qué?
JJ: Por la basura…
E: Por la basura… ¿por la basura de qué?
JJ: ¿De la ciudad?
E: ¿En qué estamos?
JJ: Ahhh… en la… ¿en el cultivo?
E: Eso… entonces ¿Y cuándo tenemos más contaminación?
JJ: En el cultivo…
E: ¿Cuando qué?
JJ: Cuando se contamina con el cultivo…
E: ¿Cuando se contamina con el cultivo?... muy bien…
E: ¿Y cuándo habría más contaminación? ¿cuando tengo uno o diez cultivos?
JJ: Diez…

Otro ejemplo pertinente para mostrar una forma de pensamiento covariativo de un nivel de desempeño D es el siguiente, del caso IS, en la cual logra establecer la relación existente la cantidad de contaminación y la cantidad industrias de tala de árboles:

> E: ajá, muy bien y ¿notas alguna diferencia cuando había una industria de tala de árboles a cuando había solo dos?
> IS: I: va aumentado cada vez más la contaminación

A su vez, lograron establecer relaciones de correspondencia entre las dos variables; por ejemplo, uno de los niños del caso, SH, expresó que por cada industria de tala de árboles siempre aumentaría dos veces la contaminación, como se ve en el siguiente fragmento:

> E: entonces ¿qué está pasando en el río? ¿Notaste alguna diferencia ahora que hubo 3, y cuando antes habían solo dos industrias de tala de árboles?
> SH: siempre aumenta dos
> E: ¿está más contaminado cuando habían dos o cuando habían 3?
> SH: está más contaminado
> E: ¿cuando habían dos industrias de tala de árboles o cuando habían 3 industrias de tala de árboles?
> SH: cuando habían 3

En esta tarea, el uso de la representación tabular fue fundamental para que dicha relación de correspondencia pudiese darse, en el sentido de que además de encontrar patrones implícitos como "voy de dos en dos", se establecen operaciones y relaciones explícitas de la forma $mx=y$, que para la presente situación sería $2x=y$. Además, lograron ubicar el nivel de contaminación el rango correcto, basándose en el resultado obtenido en la representación matemática tabular, que en la tarea llamamos "Tabla de descubrimientos". Un ejemplo de ello se puede observar en la siguiente tabla de descubrimientos del participante SH:

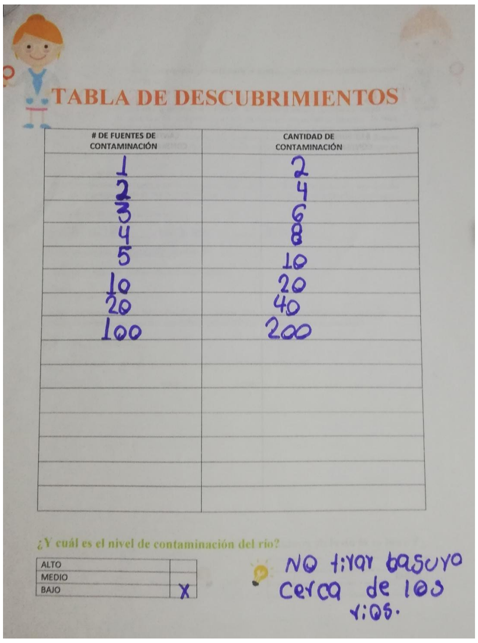


TABLA DE DESCUBRIMIENTOS

# DE FUENTES DE CONTAMINACIÓN	CANTIDAD DE CONTAMINACIÓN
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
10	20
20	40
100	200

¿Y cuál es el nivel de contaminación del río?

ALTO	
MEDIO	
BAJO	X

NO tirar basura cerca de los rios.

Figura 5.2.1. Tabla de descubrimientos SH

5.2.2 *Perfil 2*

El análisis muestra que para la primera forma de pensamiento covariativo, se encontró que TE, GO y JP, de manera intuitiva, lograron identificar las variables sin dificultad. El nivel C en este caso, se da debido a que los niños no verbalizan explícitamente la regla; es decir, no establecen la relación entre las cantidades de manera explícita, sino que lo explícito en esta forma de pensamiento solo está dado en la identificación de las variables, lo cual aún para este nivel de desempeño es una forma de pensamiento bastante importante, en términos del pensamiento funcional. Un ejemplo de ello, lo podemos encontrar en el participante JP, quien identifica las variables y sus respectivos cambios, pero no logra expresar explícitamente la regla cuando se le pide hablar sobre ella:

> E: ¿Y qué pasó en el río? ¿Notas alguna diferencia cuando solo había una o… y ahorita que hay dos ciudades?
> JP: Mmm…
> E: ¿Cómo estaría el río?
> JP: Que la contaminación… que la contaminación…

A su vez, los niños lograron establecer relaciones de correspondencia entre las dos variables entendiendo que por cada ciudad siempre aumentaría tres veces la contaminación. En esta tarea, el uso de la representación tabular fue fundamental para que dicha relación de correspondencia pudiese darse, en el sentido de que además de encontrar patrones implícitos como “voy de tres en tres”, se establecen operaciones y relaciones explícitas de la forma mx=y, que para la presente situación sería 3x=y. -Un aspecto importante a señalar es la habilidad para usar correspondencias entre cantidades más grandes, mediante operaciones explícitas como la multiplicación, como se podrá evidenciar en el siguiente fragmento de JP (Ver figura 5.2.2):

> E: Si tuviéramos veinte, ¿qué tendríamos que hacer?
> P: Otra multiplicación…
> E: Aja…
> P: Entonces veinte por tres (20x3).
> E: Eso...

Además, lograron ubicar el nivel de contaminación en el rango correcto, basándose en la cantidad de contaminación encontrada para cada situación.

Figura 5.2.2. Tabla de descubrimientos JP

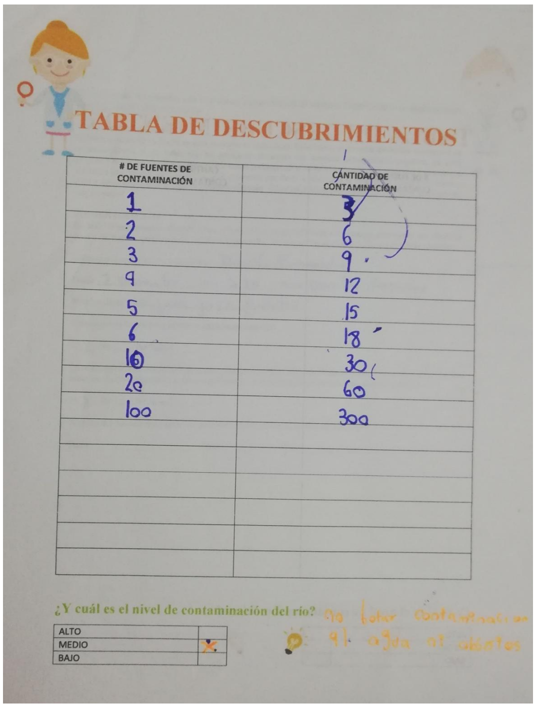


TABLA DE DESCUBRIMIENTOS

# DE FUENTES DE CONTAMINACIÓN	CANTIDAD DE CONTAMINACIÓN
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
10	30
20	60
100	300

¿Y cuál es el nivel de contaminación del río?

ALTO	
MEDIO	X
BAJO	

5.2.3 *Perfil 3*

El análisis para este perfil muestra que en la tarea del pensamiento covariativo, se encontró, de manera intuitiva, SA y SY lograron identificar las variables presentes en la situación extramatemática. Aunque el participante identificó las variables y el cambio que se generaba sobre cada una de las variables, la relación implícita que se podría evidenciar obedece más al cambio que se produce en los elementos contextuales de la tarea. Cuando la cantidad de fuentes empezó a aumentar y este cambio dejó de ser físico, para el participante dicha relación entre “cantidad de contaminación” y “cantidad de fuentes de contaminación” no se logró establecer. Esto se logró evidenciar porque SA contaba cada cuadro correspondiente a las “basuritas” para hallar la cantidad de contaminación. SY identificó las variables y el cambio que se generaba sobre cada una de las variables basado en los elementos contextuales de la tarea (e.g. cuadros que representan la basura en el modelo tridimensional) , pero en sus verbalizaciones no se manifestó una relación implícita entre éstas, lo cual pareciera llevar a pensar que veía el cambio sobre cada variable de manera independiente, como se puede evidenciar en el siguiente fragmento:

> E: Ahora sube la segunda, ahora, ¿notas alguna diferencia en el río?
> SY: Mmm… No
> E: Está… ¿Como está?, ¿más contaminando?...
> E: ¿menos contaminado? o ¿igual?
> SY: Igual
> E: ¿igual?, ¿Cual seria la cantidad de contaminación allí?
> SY: tres
> E: Pero ¿allá hay cuántas ciudades?, ya hay dos ciudades…
> E: Ya hay dos ciudades, entonces ¿Cual seria la cantidad de contaminación?
> SY: Hay dos.

SA encontró patrones implícitos que le ayudaron a establecer una relación implícita de correspondencia entre las variables cuando éstas representaban cantidades más pequeñas, ya que el modelo físico le facilitaba reconocer que a medida que aparecía una ciudad, salían tres “basuritas”. Sin embargo, cuando la cantidad de fuentes de contaminación aumentó, no logró usar dichos patrones, a partir del uso de la representación tabular. Si bien, ambos participantes tuvieron dificultades en el uso de patrones para cantidades más grandes, SY logró mantener el uso del patrón de "tres en tres" hasta la consigna de las 7 ciudades; SA logró mantener el uso de los patrones hasta la consigna de las 5 ciudades como se puede observar en la tabla de descubrimientos:

Figura 5.2.3. Tabla de descubrimientos SY

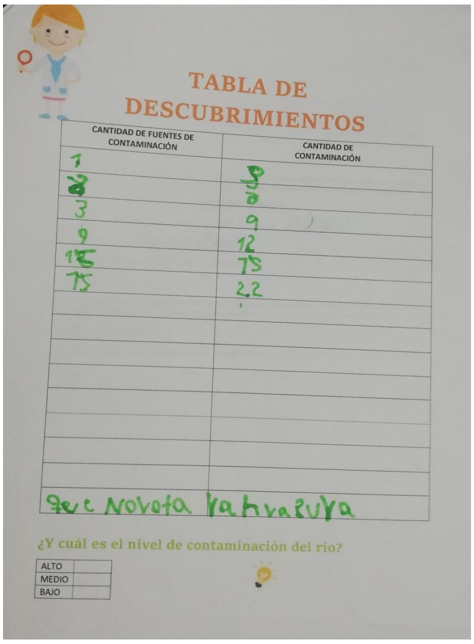
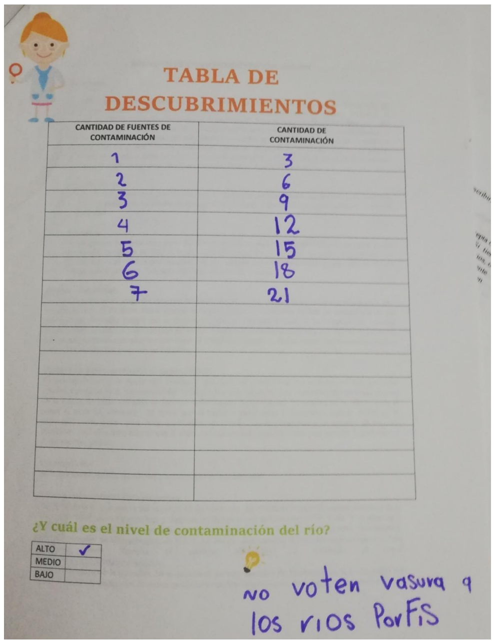


Figura 5.2.4. Tabla de descubrimientos SA



Nota: En la tabla de descubrimientos SA, los números que siguen del 3 en la columna izquierda son 5 y 6.

En la tarea del nivel de contaminación, SA no logró encontrar el nivel de contaminación en ninguno de los rangos presentados en la tabla de "nivel de contaminación", como puede verse en la siguiente verbalización:

E: no...estas son las basuritas, cuánto da cuando son las 4 ciudades
SA:...4, 5 ...11, 12
E: entonces cuál es el nivel de contaminación.
SA: a dónde está el 12?
E: estaría entre el 1 y el 10? Entre el 10 y el 20? o entre el 20 y el 30? Dónde estaría el 12?
SA: en ninguno

5.2.4 *Perfil 4*

En las diferentes fases de la tarea DN no tuvo dificultades relacionadas con la emergencia de las diferentes formas de pensamiento funcional, en las cuales se destaca el pensamiento covariativo y las relaciones de correspondencia. Para la primera forma de pensamiento covariativo, se encontró que logró identificar las variables presentes en la situación extramatemática. Sin embargo, la relación que estableció entre ellas se dio de manera implícita, por lo tanto, la regla no se logró generalizar de manera explícita, un ejemplo de ello se puede encontrar en el siguiente fragmento:

> E: y ¿por qué crees que hay mucha basura?
> DN: porque echan mucha basurita
> E: ¿y esa basurita de dónde sale?
> DN: de los árboles
> E: de las industrias de tala de árboles...muy bien
> E: crees que la cantidad de ITA influye en la cantidad de contaminación?
> DN: sí
> E: por qué?
> DN: porque hay mucha basurita y se contamina

A su vez, DN logró establecer relaciones implícitas de correspondencia entre las dos variables, a partir de patrones que le permitieron entender que por cada industria de tala de árboles siempre aumentaría dos veces la contaminación, sin importar la existencia de cantidades más grandes (Ver figura 5.2.5). En esta tarea, el uso de la representación tabular fue fundamental para que dicha relación de correspondencia pudiese darse, en el sentido de que además de encontrar patrones implícitos como “voy de dos en dos”.

La dificultad en esta tarea se presentó en que la niña no lograba establecer la correspondencia de manera explícita cuando se le preguntaba por la cantidad de contaminación, y solo se limitaba a llenar la tabla, teniendo en cuenta patrones recursivos. Además, la niña logró ubicar el nivel de contaminación el rango correcto, basándose en el resultado obtenido en la representación matemática tabular, que en la tarea llamamos “Tabla de descubrimientos”.

Figura 5.2.5. Tabla de descubrimientos DN

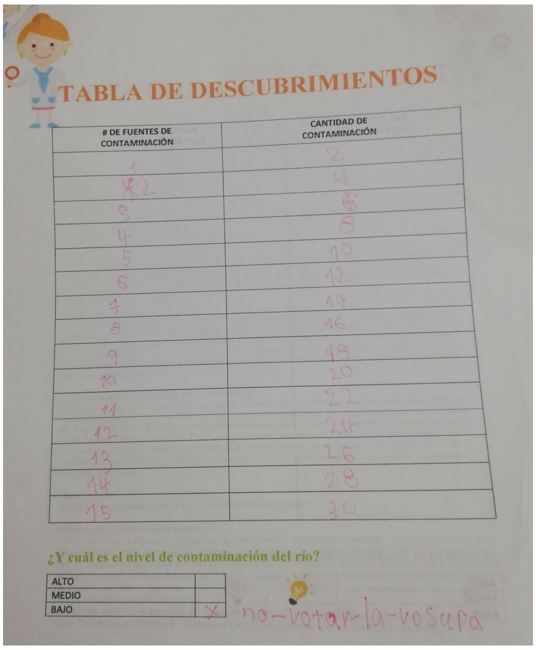


TABLA DE DESCUBRIMIENTOS

# DE FUENTES DE CONTAMINACIÓN	CANTIDAD DE CONTAMINACIÓN
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20
11	22
12	24
13	26
14	28
15	30

¿Y cuál es el nivel de contaminación del río?

ALTO	
MEDIO	
BAJO	x

no-votar-la-vosura

En general, los participantes de este estudio lograron identificar las variables que intervienen en la situación problema. Además, es mayor la cantidad de niños que logran establecer relaciones entre las variables a través de sus verbalizaciones, ya sean implícitas o explícitas, lo que hizo evidente encontrar la emergencia de formas intuitivas de pensamiento funcional. El uso de la representación matemática tabular propició dicha emergencia, pues permitía a los niños encontrar patrones recursivos para el registro de los datos en la Tabla.

Además, de haber propiciado la emergencia, el uso de la representación matemática tabular facilitó a los niños establecer relaciones de correspondencia entre las variables, incluso identificando patrones que le sirvieran para llegar cada vez más fácil a la generalización o regla. Las dificultades, en la gran mayoría los perfiles, estuvieron asociados al carácter explícito de la regla; así como en el carácter explícito de las operaciones y relaciones sobre las cantidades, a la hora de encontrar la cantidad de contaminación del río, para cada situació

6. Discusión

Como puede verse, los niños al identificar las variables y sus respectivas relaciones, muestran, así sea de manera intuitiva, comprensiones significativas sobre el trabajo con funciones, aspectos que son fundamentales en el estudio del álgebra (Blanton, et al., 2015).

La decisión de caracterizar las tres habilidades, surge por la necesidad de entender las diferentes formas de pensamiento funcional y algebraico como complementarias para el desarrollo del mismo. Entre las formas de pensamiento covariativo y la notación algebraico, se encuentra una complementariedad, en el sentido de que las expresiones de las generalizaciones a través de las verbalizaciones aportan información del contexto, que siempre falta en la expresión algebraica (Kaput, Carraher & Blanton, 2008). Las verbalizaciones de la regla, de las generalizaciones son igual de importantes que la notación algebraica, porque se expresa la identificación y la relación de las variables, aunque no haya una inscripción simbólica sofisticada. Además, porque los recursos simbólicos de los niños, también por la convencionalidad de los símbolos, son limitados; por lo cual la generalización siempre termina teniendo lugar bajo otras formas del lenguaje natural (Kaput, Blanton & Moreno, 2008, en Kaput, Carraher & Blanton, 2008), además del expresado a través de la sintaxis algebraica

Lo anterior pudo verse en las formas de pensamiento que emergían a lo largo de la resolución de las tareas en cada uno de los casos aquí presentados, en los cuales los niños lograron verbalizar las respectivas relaciones entre las variables “cantidad de fuentes”, “cantidad de basuritas” y “cantidad de contaminación”. Esto a su vez, se propició por la experiencia de los niños en el uso de representaciones tabulares, que facilitaron patrones para la identificación de la correspondencia entre las variables.

Dicha correspondencia, además, facilitó el uso de la habilidad de la notación algebraica, en la medida en que desde la representación tabular, la regla mx=y ya estaba dada.

Es por esa razón que la tarea de la notación algebraica se realizó siempre al final de cada sesión, con el fin de que los niños lograran contar con diferentes recursos para desarrollar generalizaciones cada vez más sofisticadas.

Lo anterior es importante reconocerlo, porque los resultados de los niños que muestran desempeños C y D confirman las premisas sobre la capacidad que tienen para notar las relaciones entre las cantidades, para rastrear y organizar los datos de las funciones presentes en el contexto del problema, y para representarlos a través de símbolos convencionales aritméticos en tablas de funciones (Blanton, 2015).

Un aspecto importante a resaltar de este resultado en las tareas de notación algebraica es la asociación que existe entre la habilidad que tienen los niños para expresar generalidades a través de símbolos y la habilidad para expresar las relaciones entre las variables que covarían (Brizuela, et al., 2015), lo cual se puede encontrar en los desempeños que los niños tuvieron en las tareas sobre pensamiento covariativo, en la cual lograron identificar las variables, entendiéndolas como cantidades que covarían.

Si bien para la mayoría de los participantes del estudio microgenético hubo dificultades en las reglas sintácticas propias del carácter convencional de la notación algebraica, lograron entender la correspondencia entre el símbolo aritmético y la letra que lo representaría en la regla; y además, lograron, en alguno de los casos, reemplazar cada letra por una cantidad conocida, lo cual es pertinente resaltar, pues es muestra de cómo el uso de una representación matemática como la notación, puede propiciar formas de pensamiento funcional cada vez más elaboradas.

Esto a su vez, muestra cómo los niños pueden pensar acerca de estructuras y relaciones mucho antes de recibir instrucción en el uso de las letras en la notación algebraica (Blanton, 2015), que es uno de los ejes del diseño de la investigación, el cual no privilegió el uso de la instrucción directa, sino la emergencia de las formas intuitivas de pensamiento funcional, por las condiciones y naturaleza de las tareas.

Es así cómo el uso de múltiples representaciones para propiciar la emergencia de formas de pensamiento funcional cobra sentido, en el sentido de que la misma naturaleza del álgebra implica procesos de simbolización complejos, de los cuales se sirve la generalización (Kaput, 2008). Puede verse además que para cada de una de las habilidades, los procesos de generalización resultaron decisivos a la hora de puntuar los desempeños de los niños, debido a que estos constituyen la ruta principal hacia el álgebra.

Kaput (2008), afirmaba que la aritmética generalizada como ruta hacia el álgebra, parte de la idea de que uno puede reemplazar una expresión por una equivalente o análoga, por lo cual el uso de operaciones aritméticas para las tareas en donde se privilegiaba el uso de la habilidad "relaciones de correspondencia" a través de la representación tabular fue tan relevante. Por ello, una de las formas de pensamiento de las que se sirvió la presente investigación para caracterizar las trayectorias en el uso de la habilidad de la notación algebraica fue el movimiento semiótico que hicieron los niños para reemplazar los números por literales en expresiones análogas. Kaput, Blanton & Moreno (2008), afirman que el movimiento semiótico de los análogos visuales entre los sistemas aritméticos y algebraicos, es un proceso continuo de sustitución de formas visualmente similares.

Finalmente, el uso de varias representaciones sirven para facilitar la emergencia de formas de pensamiento funcional y algebraico cada vez más elaborados, pues los niños no solo registran los elementos que identifican en los problemas, sino que a partir de ese registro pueden estructurar cada vez más su pensamiento. Esta variedad en los sistemas de representación es importante porque permite que el pensamiento algebraico de los niños continúe emergiendo a través de la identificación y comparación de múltiples estructuras (Brizuela & Earnest, 2008, en Kaput, Carraher & Blanton, 2008).

En la experiencia museística, el análisis de las tareas se realizó sobre la emergencia de formas de pensamiento asociadas al uso de las habilidades del pensamiento covariativo y de las relaciones de correspondencia, por lo cual la discusión teórica descrita para el estudio microgenético sobre las formas de pensamiento funcional de los niños en relación a cómo los niños identifican las variables y sus respectivas relaciones; generalizan dichas relaciones y realizan correspondencia sobre ellas a través de representaciones tabulares, es la misma para esta parte del estudio.

Un aspecto de suma importancia a destacar en esta parte del estudio está asociado a los ambientes de aprendizaje, y cómo estos resultan en espacios que propician la emergencia de formas de pensamiento funcional sin la mediación de un agente educativo que a través de la instrucción directa enseñe el uso convencional de las representaciones matemáticas y de las habilidades algebraicas. El ambiente de aprendizaje "El río Oikos está en problemas' contó con situaciones estructuras, en las cuales los desempeños de los niños fueron coherentes con las submetas de aprendizaje, de las que se destaca la identificación de las variables que influyeron en la contaminación del río; en la generalización de las relaciones entre las fuentes de contaminación y el nivel de contaminación del río,a través de verbalizaciones y de representaciones tabulares; y la reflexión acerca de las prácticas apropiadas para el buen uso y cuidado de los ríos. Éste último, supuso una experiencia adicional, dada las características del contexto de aprendizaje no formal en el que tuvo lugar la intervención. Al ser éste un museo, que cuenta con propósitos educativos específicos asociados a las ciencias naturales, al cuidado de la biodiversidad, al juego y al arte, se buscó que los niños a través del rol asignado como científicos pudieran reflexionar acerca de las prácticas que debían tomar los niños del país Oikos (Ver figuras 1, 2, 3, 4, y 5).

Teniendo en cuenta los planteamientos de Siegler (citado en Sánchez, et. al, 2013) sobre el cambio cognitivo y la variabilidad en las trayectorias, los resultados mostraron que fue posible evidenciar el cambio incluso en términos de la velocidad con la que estos se presentaron, pues se recuerda que el estudio, tanto para el diseño microgenético como para el diseño de la experiencia museística, se realizó en un periodo corto de tiempo. Los cambios se presentaron dentro de cada tarea. Aunque la variabilidad o la estabilidad con la que se manifestó la emergencia de las formas de pensamiento pudo deberse a la estructura misma de la tarea, de las preguntas, fue notable cómo en las últimas sesiones la estabilidad en las formas de pensamiento se iba manifestando cada vez más. Esto es importante, dado que muestra cómo los niños lograron, a partir de las habilidades utilizadas para tareas muy específicas, generalizarlas para el resto de tareas isomorfas con las que fueron interactuando a lo largo de las sesiones.

Este estudio es relevante ya que los resultados muestran de manera positiva la emergencia de las formas de pensamiento funcional, no solo en el contexto del diseño microgenético, sino también en un contexto tan itinerante y dinámico como los museos, en el cual dicha emergencia se asocia directamente a los elementos de las tareas del ambiente de aprendizaje. Esto sirve de punto de partida para pensarse ambientes de aprendizaje complejos en contextos de aprendizaje no formal, en los que se pueda promover cada vez más el uso de ambientes de aprendizaje que propicien la emergencia de formas de pensamiento funcional a edades tempranas. Además de ello, en esta parte del estudio, un elemento destacable es el uso de las representaciones matemáticas en este tipo de contexto, sin previa instrucción, teniendo en cuenta elementos interactivos como la asignación de roles para que los niños puedan acceder a ellos de manera intuitiva, a través del juego.

En conclusión, el uso de ambientes de aprendizaje que promuevan la emergencia de formas de pensamiento funcional a edades tempranas en contextos de aprendizaje no formal, son de suma relevancia, porque permiten el acceso de los niños al álgebra, y enriquecen y privilegian el desarrollo del pensamiento algebraico, brindando así la posibilidad de que su pensamiento sea cada vez más estructurado y coherente con los aprendizajes que recibirán en contextos escolarizados en grados superiores.

7. Bibliografía

Andre, L., Durksen, T. & Volman, M. (2016). Museums as avenues of learning for children: a decade of research. Learning Environments Research, 20(1), 47-76.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En *Early algebraization* (5-23). Springer Berlin Heidelberg.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships.

Blanton, M., Brizuela, B., Murphy, A., Sawrey, K. & Newman, A. (2015). A learning trajectory in 6 year olds' thinking about generalizing functional relationships. Journal for Research in Mathematics Education, 46(5), 511- 558

Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K., Gibbins, A. & Kim, Y. (2018). Exploring Kindergarten Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(3), 167-201, doi: 10.1080/10986065.2018.1474534

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes Algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education. 36* (5), 412-446. DOI: 10.2307/30034944

Breiner, J., Harkness, S., Jhonson, C. & Koehler, C. (2012). What is STEM? A discussion about conceptions of STEM in education and partnerships. School Science and Mathematics. 112, doi: 10.1111.

Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., Gardiner, M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas, mathematical thinking and learning. *17*(1)*, 34-63*.

Brizuela, B.M. , Martinez, M.V. , and Cayton-Hodges, G.A. (2013). The Impact of Early Algebra: *Resul ts from a Longitudinal Intervention. Journal ofResearch in Mathematics Education, 2*(2), 209-241

Brizuela, B. & Schliemann, A. (2004). Ten year old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics, 24*(2), 33-40.

Brizuela, B. & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: the case of the "best deal" problem. Algebra in the early grades. En Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Ed.), Algebra in the early grades (19-57). New York, EEUU: Taylor and Francis Group.

Brizuela, B. & Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 209-319.

Carraher, D., Schliemann A., Brizuela, B. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*(37), 87-115.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. (2005). Treating the operations of arithmetic as functions. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph,* (13).

Cañadas, M., Brizuela, B. & Blanton, M. (2015). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior* (41), 87-103.

Chen, Z., & Siegler, R. (2000). Across the great divide: bridginf the gap between understanding of toddlers' and older children's thinking. *Monographs of the society for research in child development, 65*(2).

Davidson, D. (1999). The emergence of thought. *Erkenntnis 51* (1), 7 - 17.

diSessa, A. (2007). An Interactional Analysis of Clinical Interviewing. *Cognition and Instruction, 25*(4), 523–565

Hegedus, S. & Otálora, Y. (2014). Estimation strategies of young children using multi-touch technology. In: P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.). Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, (6), 96. Vancouver, Canada: PME.

Kaput, J., Blanton, M. & Moreno, L. (2008). Algebra From a Symbolization Point of View. Algebra in the early grades. En Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Ed.), Algebra in the early grades (19-57). New York, EEUU: Taylor and Francis Group.

Kaput, J. (2008).What is algebra? What is algebra reasoning?. Algebra in the early grades. En Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Ed.), Algebra in the early grades (19-57). New York, EEUU: Taylor and Francis Group.

Malafouris, Lambros (2013). The extended mind. In How things shape the mind: A Theory of material engagement. 57-85. Cambridge: MIT Press.

Martinez, M. & Brizuela, B. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior, 25(4*), 285-298.

Ríos, A. (2015). Los zoológicos en la arquitectura de paisaje. Bitácora arquitectura, (31), 14-21.

Sánchez, H., Guevara, M. & Cerchiaro, E. (2013). Desarrollo y/o cambio de la noción de objeto permanente y causalidad operatoria: evidencia empírica en el primer año de vida. *Avances en Psicología Latinoamericana, 31*(2), 291-309

Siegler, R. (2007). Cognitive Variability. Developmental Science. (10), 104-109.

Smitter, Y. (2006). Hacia una perspectiva sistémica de la educación no formal. *Laurus*, (12), 241-256.

Yin, R. (2014). Case study research: design and methods. EEUU: SAGE publications